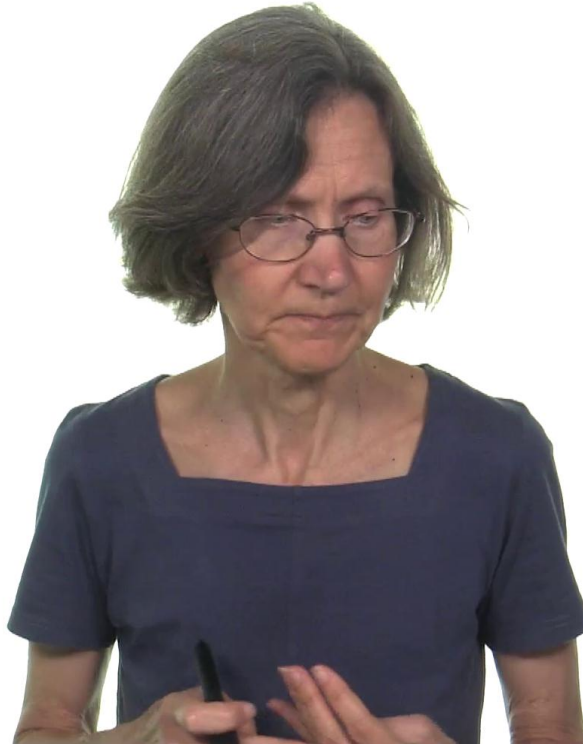




9.1 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$



Dans ce chapitre, nous allons introduire la géométrie dans nos espaces vectoriels. Je vais commencer par étudier la géométrie que nous connaissons déjà dans $\mathbb{R}^2$ et puis dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Notes

Summary



0m 04s

Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$: Pour $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Propriétés. Pour $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- (1) $u \cdot v = v \cdot u$ *Symétrique*
 - (2) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
 - (3) $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v) = u \cdot (\lambda v)$ *linéaire*
 - (4) $u \cdot u \geq 0$ et si $u \cdot u = 0$ alors $u = 0$ *défini positif.*
- $\downarrow$
 $u_1^2 + u_2^2 \geq 0$

9.1 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$



Je pense que c'est un rappel. Je rappelle la définition de ce qu'est un produit scalaire, *dot product* dans $\mathbb{R}^2$. Donc je prends deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et je définis cette opération-là, linéaire, $u \cdot v$, donc le produit scalaire de u avec v . Et puis on multiplie les coordonnées et on additionne. Maintenant, il y a plusieurs propriétés qui sont utiles avec ce produit scalaire, c'est que c'est symétrique. C'est linéaire, ces deux-là. Ça c'est additif et ensuite linéaire par rapport au scalaire. Donc ici c'est linéaire. Et puis ici, il y a une propriété, c'est que si on fait le produit scalaire de u avec lui-même, ça donne... Ici, pourquoi ça donne un nombre toujours positif ? Parce que ça donnerait $u_1^2 + u_2^2$, par la définition. Et puis comme c'est le carré d'un nombre réel, c'est non négatif. Et la somme, ça reste non négatif. Et puis, si c'est égal à zéro, alors chacun de ces termes-là doit être égal à zéro. Et donc u_1 et u_2 sont égal à zéro et u est égal à zéro. Et puis ça c'est une propriété qu'on appelle la propriété d'être défini positif. Après on va généraliser cette définition à nos espaces vectoriels.

Notes

Summary



0m 17s

Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$: Pour $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Propriétés. Pour $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- (1) $u \cdot v = v \cdot u$ *Symétrique*
- (2) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
- (3) $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v) = u \cdot (\lambda v)$ *linéaire*
- (4) $u \cdot u \geq 0$ et si $u \cdot u = 0$ alors $u = 0$ *déf. positif.*

$$\downarrow$$

$$u_1^2 + u_2^2 \geq 0$$

Remarque $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) :$ $u \cdot v = u \cdot v^T = (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \in \mathbb{R}.$

9.1 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$



On va prendre ces propriétés et faire une définition générale. Mais avant de passer à cette étape, je préfère rester ici et étudier le lien entre cette définition-là et la géométrie dans $\mathbb{R}^2$. Maintenant, avant de passer au prochain *slide*, je vais juste faire encore une remarque. J'aimerais vous faire remarquer une chose, c'est qu'en termes des vecteurs lignes et colonnes, on a la chose suivante : C'est que u , donc c'est ce vecteur-là, écrit en ligne, et v , c'est ce vecteur-là, écrit en ligne. Et puis, si je fais le produit scalaire de u avec v , je peux penser que c'est une multiplication de matrice de la façon suivante : Donc u produit scalaire avec v est égal... Qu'est-ce que je peux faire ici ? Je peux multiplier u en pensant que c'est une matrice, fois v^T parce que ça serait une ligne et une colonne, donc j'explicite ici. Donc j'aurais $(u_1 \ u_2)$ qui multiplie v_1, v_2 , qui donne effectivement $u_1 v_1 + u_2 v_2$, qui est un nombre réel. Alors ici, il faut voir ça. Maintenant, ça c'est comme une matrice 1×2 , ça c'est une matrice 1×2 , et puis ça après, quand on fait la transposée, ça c'est une matrice 2×1 , donc on peut faire le produit.

Notes

Summary



1m 37s

Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$: Pour $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Propriétés. Pour $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- (1) $u \cdot v = v \cdot u$ *Symétrique*
- (2) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
- (3) $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v) = u \cdot (\lambda v)$ *linéaire*
- (4) $u \cdot u \geq 0$ et si $u \cdot u = 0$ alors $u = 0$ *défini positif.*

$$\downarrow$$

$$u_1^2 + u_2^2 \geq 0$$

Remarque

$u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$:

$u \cdot v = u \cdot v^T = (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \in \mathbb{R}.$

matrice 1x2 *matrice 2x1* *identifié avec $M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$.*

9.1 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$



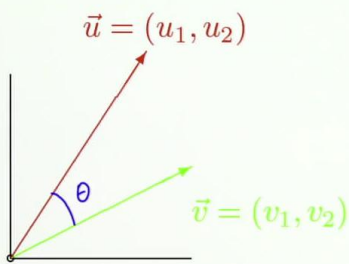
Et puis on identifie $\mathbb{R}$ avec les matrices 1 x 1. Donc ça c'est une manipulation qui va être utile même presque tout de suite, mais je l'utiliserai souvent. Maintenant, cette question de géométrie.

Notes

Summary



3m 15s



On peut

9.1 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$



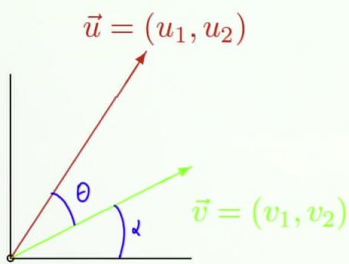
Alors je commence avec un vecteur (u_1, u_2) dans $\mathbb{R}^2$. Et puis d'abord, je vais juste montrer qu'on peut utiliser le produit scalaire pour calculer la longueur de ce vecteur. Donc on sait que pour calculer la longueur, ici, on peut faire un triangle rectangle. Comme ça. Et puis à ce moment-là, cette longueur ici c'est u_1 et cette longueur là c'est u_2 . Et alors on sait que la longueur de u est égale à $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Donc ça c'est exactement $\sqrt{u \cdot u}$. Et puis on appelle ça la norme de u . Et on la dénote, on la désigne par deux barres comme ça, verticales. Donc ça c'est pour vous montrer que la longueur usuelle d'un segment dans $\mathbb{R}^2$, on peut la réaliser en utilisant le produit scalaire. Je rappelle aussi que ça a un sens, toujours, parce que ce nombre-là il est non négatif, donc on peut faire la racine carrée, ça donne un nombre réel. Aussi, je rappelle que ceci donnerait zéro que si le vecteur est le vecteur nul. Maintenant on parle des angles entre des vecteurs. Donc les angles. Donc ici j'aimerais vous montrer qu'il y a un lien, ou que je peux utiliser le produit scalaire pour calculer cet angle-là. Mais il faut que je développe un peu.

Notes

Summary



3m 31s



On peut utiliser le produit scalaire pour calculer l'angle θ :

On applique la rotation $R_{-\alpha}$ aux deux vecteurs u et v .

$$R_{-\alpha}(u) \cdot R_{-\alpha}(v) = R_{-\alpha}(u) (R_{-\alpha}(v))^T = R_{-\alpha}(u) v^T R_{-\alpha}^T$$

$$R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos -\alpha & -\sin -\alpha \\ \sin -\alpha & \cos -\alpha \end{pmatrix}$$

9.1 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$



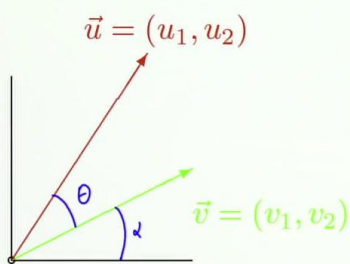
Donc on peut utiliser le produit scalaire pour calculer l'angle θ . Il faut que je vous montre. Maintenant ici, j'aimerais faire une petite astuce, c'est que cet angle ne va pas changer si je fais une rotation du dessin. Donc ici, j'appelle ça α . Pour calculer l'angle entre u et v , je pourrais tourner tout ça vers le bas et puis je calculerais l'angle entre les images de ces vecteurs par une rotation. Donc je vais changer le dessin. Donc on applique la rotation $R_{-\alpha}$ aux deux vecteurs u et v . Et puis maintenant, quel est l'effet ici ? J'aimerais faire le produit scalaire. Donc si je fais $R_{-\alpha}(u) \cdot R_{-\alpha}(v)$, alors ça, ça donne, en utilisant la formule que j'avais développée l'autre fois. Donc ça c'est un vecteur ligne, ça c'est un vecteur ligne. On sait qu'on peut faire le produit, $R_{-\alpha}(u)$, et puis le produit matriciel de la transposée du deuxième vecteur. Et puis maintenant, la transposée. Ici, c'est v^T et puis $R_{-\alpha}^T$, où ici, je confonds $R_{-\alpha}$ et la matrice qui représente $R_{-\alpha}$. Donc je rappelle, cette matrice, c'est $\cos -\alpha$ $-\sin -\alpha$, $\sin -\alpha$ $\cos -\alpha$. Et puis, donc ici, je vais...

Notes

Summary



5m 21s



On peut utiliser le produit scalaire pour calculer l'angle θ :

On applique la rotation $R_{-\alpha}$ aux deux vecteurs u et v .

$$R_{-\alpha}(u) \cdot R_{-\alpha}(v) = R_{-\alpha}(u) (R_{-\alpha}(v))^T = R_{-\alpha}(u) v^T R_{-\alpha}^T$$

$$= uv^T R_{-\alpha} R_{-\alpha}^T = uv^T = u \cdot v.$$

$uv^T \in \mathbb{R}$

$$R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) \\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On conclut que
 $R_{-\alpha}(u) \cdot R_{-\alpha}(v) = u \cdot v.$

9.1 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$



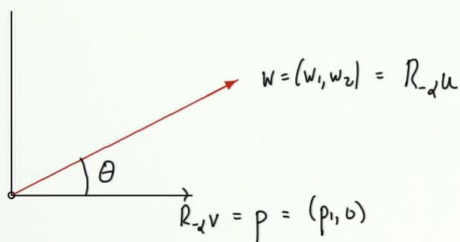
Donc ça c'est un scalaire maintenant. Donc uv^T est un scalaire ou une matrice 1×1 , donc je peux le passer devant. Donc on a $a = uv^T R_{-\alpha} R_{-\alpha}^T$. Et puis il y a quelque chose de joli ici, c'est que si je fais $R_{-\alpha} R_{-\alpha}^T$, j'écris fois la transposée. Donc là, on a cosinus au carré plus sinus au carré, deux $-\alpha$ donc c'est 1. Ici j'ai cosinus moins cosinus donc c'est 0. Sinus cosinus moins cosinus sinus, ça c'est 0. Et ici, j'ai sinus au carré plus cosinus au carré, 1. Donc en fait, cette matrice-là, c'est juste la matrice identité donc le résultat ici c'est : uv^T donc c'est uv . Donc ce que je voulais souligner ici c'est que si je fais une rotation de ces deux vecteurs, j'obtiens deux vecteurs dont le produit scalaire c'est le même que le produit scalaire des deux vecteurs originaux. Donc on conclut que le produit scalaire de ces images... Donc qu'est-ce que ça me permet de faire ? C'est que si je veux travailler avec le produit scalaire et faire un lien entre le produit scalaire de u et v et cet angle, alors autant les placer en bas et puis le produit scalaire reste le même. Donc maintenant je vais faire exactement ça.

Notes

Summary



7m 18s



$$\cos \theta = \frac{w_1}{\|w\|}$$

$$\|w\| \cos \theta = w_1 = w_1 \cdot \frac{p_1}{p_1} = \frac{w_1 p_1}{\|p\|}$$



9.1 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$



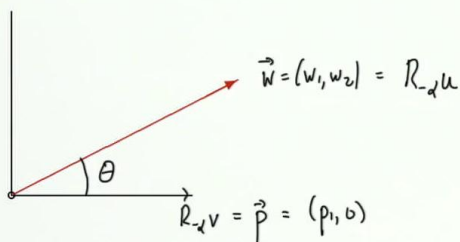
Donc maintenant, ce vecteur ici, je l'appelle w et ça c'est l'image du vecteur u par la rotation. Et ici en bas, j'ai $R_{-\alpha}V$, que j'appelle v , c'est l'image du vecteur v par la rotation. Donc ici cet angle, par la rotation $-\alpha$, donc cet angle-là c'est toujours l'angle θ parce qu'on a juste fait une rotation en bas. Maintenant, pourquoi on a gagné quelque chose ? C'est parce qu'ici, $R_{-\alpha}v$, c'est un vecteur sur l'axe, donc ça a des coordonnées, disons p_1 et 0. Et puis maintenant, j'utilise juste la géométrie euclidienne usuelle. Donc le cosinus de θ est égal à la coordonnée w_1 , ici, divisé par la longueur. Donc si je fais un triangle rectangle ici, j'ai l'adjacent sur l'hypoténuse, donc c'est la longueur de w , la norme de w . Et donc j'ai : $\|w\| \cos \theta = w_1$, qui est égal à w_1 . (p_1/p_1) qui est égal à $w_1 p_1$ sur la longueur de p . Et donc à la fin, j'ai une formule comme suit. J'ai $\|w\| \|p\| \cos \theta$, est égal à $w_1 p_1$, qui est exactement le produit scalaire de ces deux vecteurs w et p .

Notes

Summary



8m 58s



$$\cos \theta = \frac{w_1}{\|w\|}$$

$$\|w\| \cos \theta = w_1 = w_1 \cdot \frac{p_1}{p_1} = \frac{w_1 p_1}{\|p\|}$$

$$\|w\| \|p\| \cos \theta = w_1 p_1 = \vec{w} \cdot \vec{p}$$

En général. Si θ est l'angle formé par deux vecteurs u et v (dans $\mathbb{R}^2$),

$$0 \leq \theta \leq \pi, \text{ alors } u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta. \quad \leftarrow$$

Dans $\mathbb{R}^3$, on définit un produit scalaire $u \cdot v$ par $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ où $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$.

9.1 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$



Et puis en général, si θ est l'angle formé par deux vecteurs u et v , et on précise parce qu'il faut dire comment on va prendre les angles, donc entre 0 et π , alors si on fait le produit scalaire de u avec v , géométriquement ça donne le même nombre que la longueur de u , donc la norme, la longueur de v , la norme, fois le cosinus de θ . Donc il y a cette jolie corrélation entre le produit scalaire et la géométrie de ces vecteurs. Et puis ça se généralise dans $\mathbb{R}^3$. Donc la même dans $\mathbb{R}^3$. On définit un produit scalaire de même façon. Je vais multiplier les coordonnées successives et additionner, où $u = (u_1 \ u_2 \ u_3)$ et $v = (v_1 \ v_2 \ v_3)$. Et puis on aura les mêmes propriétés : symétrique, linéaire, définie positive. Et puis là aussi, on peut établir la validité de cette formule-là. Maintenant, après, dans les autres espaces vectoriels, on a envie de généraliser ces notions et de définir les produits scalaires dans un espace vectoriel quelconque, même de fonction ou de matrice. Et puis c'est ce qui va suivre.

Notes

Summary



10m 56s