



9.2 Produit scalaire: définition, exemples



Dans cette vidéo, nous allons donner la définition générale d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On a déjà vu dans la vidéo précédente, ce qu'est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, maintenant, on va généraliser ça.

Notes

Summary



0m 03s

Définition.

(a) Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire sur V est une application qui fait correspondre à chaque paire ordonnée (u, v) de vecteurs $u, v \in V$ un nombre réel, noté $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$, tel que les conditions suivantes sont vérifiées, pour tous $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ *Symétrique*
- (2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ *additif à gauche*
- (3) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$
- (4) $\langle u, u \rangle \geq 0$ et si $\langle u, u \rangle = 0$ alors $u = 0$

(b) Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire s'appelle un **espace euclidien**.



9.2 Produit scalaire: définition, exemples

Alors la définition est la suivante : Je me donne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, un produit scalaire sur V , donc je souligne ça, est une application qui fait correspondre à chaque paire ordonnée de vecteurs. Donc je prends un u et v dans V et puis je vais faire correspondre un nombre réel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La notation c'est pas standard dans ce cours, bon c'est pas pas non-standard non plus, c'est-à-dire c'est une notation qui est utilisée mais il y a d'autres notations. Pour ce cours, je choisis la notation avec des crochets pointus, donc $\langle u, v \rangle$ qui dénote le nombre réel qui est associé à la paire (u, v) , tel que les conditions suivantes soient vérifiées : pour tous u, v, w dans V et λ dans $\mathbb{R}$. Donc d'abord, il faut que la valeur qu'on trouve, si on met u en premier ou v en premier, ça c'est la même. Donc ça c'est symétrique. Et puis ici, on a la propriété que si on fait une somme de deux vecteurs, alors ça se défait, donc c'est linéaire à gauche mais comme c'est symétrique, c'est aussi linéaire à droite. Donc ça c'est linéaire ou additif disons. Mais également à droite car quand on change de côté, c'est symétrique.

Notes

Summary



0m 21s

Définition.

(a) Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire sur V est une application qui fait correspondre à chaque paire ordonnée (u, v) de vecteurs $u, v \in V$ un nombre réel, noté $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$, tel que les conditions suivantes sont vérifiées, pour tous $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ *symétrique*
- (2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ *additif à gauche, également à droite.*
- (3) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ *linéaire, "bilineaire".*
- (4) $\langle u, u \rangle \geq 0$ et si $\langle u, u \rangle = 0$ alors $u = 0$

(b) Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire s'appelle un espace euclidien.

Remarque : $\langle u, v \rangle$ s'appelle le produit scalaire de u et v

9.2 Produit scalaire: définition, exemples



Et puis ici les scalaires, on multiplie le vecteur par un scalaire, alors ça sort. C'est la même chose à droite comme c'est symétrique. Donc ici maintenant, ces deux conditions ensemble ça veut dire linéaire à gauche et à droite, on dit bilinéaire, parce que c'est vrai à gauche et à droite. Et puis enfin, une dernière propriété qui est très, très importante, c'est que si on fait le produit scalaire de u avec lui-même, alors ça donne toujours un nombre réel non-négatif. Et si ça donne le nombre 0, alors ça veut dire que le vecteur u est 0. Et ça c'est un axiome. C'est quelque chose que nous imposons. Donc il faut à chaque fois vérifier ces quatre conditions pour savoir qu'on a un produit scalaire. Maintenant, si on a un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie qui est muni d'un produit scalaire, alors on l'appelle un espace euclidien. Ce nom est utilisé dans ce cas-ci, où on a $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Maintenant, comme j'ai déjà utilisé, mais je vais faire la remarque. J'ai déjà fait comme ça ci-dessus. C'est que cette valeur qu'on trouve s'appelle le produit scalaire de u et v . Voilà, ça s'appelle le produit scalaire de u et v .

Notes

Summary



Définition.

(a) Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire sur V est une application qui fait correspondre à chaque paire ordonnée (u, v) de vecteurs $u, v \in V$ un nombre réel, noté $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$, tel que les conditions suivantes sont vérifiées, pour tous $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ *symétrique*
- (2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ *additif à gauche, également à droite.*
- (3) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ *linéaire, "bilineaire".*
- (4) $\langle u, u \rangle \geq 0$ et si $\langle u, u \rangle = 0$ alors $u = 0$

(b) Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire s'appelle un **espace euclidien**.

Remarques : • $\langle u, v \rangle$ s'appelle le produit scalaire de u et v .

• Autres notations utilisées couramment : $(u|v)$, $\langle u|v \rangle$, (u, v) .

9.2 Produit scalaire: définition, exemples



Ça c'est une remarque. Et puis, juste pour vous rendre attentifs, il y a d'autres notations possibles utilisées couramment. Par exemple, des fois on voit u avec une barre v . Des fois on voit la même chose avec des crochets en angle ou même juste ça, mais ça je préfère éviter parce que ça ça ressemble juste à une paire ordonnée. Et puis, on a déjà vu le produit scalaire où on met un point entre deux dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Maintenant ce qui est important c'est de voir des exemples. Et puis des exemples qui ne sont pas juste le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Notes

Summary



3m 05s

Exemples.

(1) Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$

$$u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Exercice: vérifier que les 4 axiomes sont
satisfaits. $u, v \in M_{1 \times n}(\mathbb{R}), \quad u \cdot v = u \cdot v^T$

(2) $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$A, B \in V, A = (a_{ij}),$$

$$\text{Trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

$$\text{On définit } \langle A, B \rangle = \text{Trace}(A^T B).$$



9.2 Produit scalaire: définition, exemples

Donc voilà deux exemples, il y en aura un troisième aussi. Donc ici, je me donne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, donc n est un nombre entier et les u_i sont à valeurs réelles. Et puis je définis le produit scalaire de u avec v . Donc cette fois, je vais de nouveau utiliser le point comme notation. Et puis, ça c'est les produits successifs. Et puis je ne vais pas vérifier que c'est un produit scalaire. Je laisse cela en exercice : vérifier que les quatre axiomes sont satisfaits. Donc ça c'est une chose. Et puis une autre chose que je voulais remarquer, que j'ai déjà remarqué dans la vidéo précédente, c'est que quand on voit ça, si on imagine que ça c'est une matrice, donc si on considère ça comme une matrice, donc u et v considérés comme des matrices qui ont une ligne et n colonnes, alors le produit scalaire qui est un nombre réel, donc $u \cdot v$, c'est que je pourrais multiplier u fois v^T . Donc je tourne v de l'autre côté et je fais une multiplication. Et ça, ça me donne une matrice 1×1 à coefficient réel que je regarde comme étant un nombre réel.

Notes

Summary



Exemples.

(1) Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$

$$u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

*Exercice: vérifier que les 4 axiomes sont
satisfaits. $u, v \in M_{1 \times n}(\mathbb{R}), \quad u \cdot v = u \cdot v^T \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$.*

(2) $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$A, B \in V, A = (a_{ij}),$$

$$\text{Trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

$$\text{On définit } \langle A, B \rangle = \text{Trace}(A^T B).$$

*Vérifions que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un
produit scalaire sur V .*

• $\text{Trace}(A^T B) \in \mathbb{R}.$

• $\langle B, A \rangle$

9.2 Produit scalaire: définition, exemples



Notes

Et puis ça serait des fois utile dans la suite de ce qu'on fait. Donc ça c'est important de remarquer. Et puis maintenant, un autre exemple, un vrai exemple, Je me donne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Donc ça c'est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n^2 . Et puis, je définis pour deux matrices, donc deux vecteurs là-dedans, le produit scalaire. Ici, je rappelle que la trace de la matrice A , c'est la somme des coefficients le long de la diagonale. Et puis je définis le produit scalaire ou bien je définis un nombre réel $\langle A, B \rangle$, d'être la trace de $A^T B$. Et cette fois, j'aimerais vérifier que ça c'est effectivement un produit scalaire. Donc vérifions que ceci est bien un produit scalaire sur V . Alors, il y a plusieurs choses à vérifier. Donc une chose, c'est que c'est un nombre réel. Donc la trace de $(A^T B)$ est bien un nombre réel, uniquement déterminé par A et B . Donc ça c'est OK. Et puis, deuxièmement, on doit vérifier que c'est symétrique. Donc si je fais le produit scalaire de A et B . Je dis que c'est un produit scalaire, je vais déjà dire ça.

Summary



5m 21s

Exemples.

(1) Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$

$$u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Exercice: vérifier que les 4 axiomes sont
satisfaits. $u, v \in M_{1 \times n}(\mathbb{R}), \quad u \cdot v = u \cdot v^T \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$.

(2) $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$A, B \in V, A = (a_{ij}),$$

$$\text{Trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

$$\text{On définit } \langle A, B \rangle = \text{Trace}(A^T B).$$

Vérifions que $\langle, \rangle$ est bien un
produit scalaire sur V .

$$\bullet \text{Trace}(A^T B) \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \langle B, A \rangle = \text{Trace}(B^T A) = \text{Trace}((B^T A)^T) \\ = \text{Trace}(A^T (B^T)^T) = \text{Trace}(A^T B) = \langle A, B \rangle.$$

$$\begin{aligned} \bullet \langle A+C, B \rangle &= \text{Trace}((A+C)^T B) \\ &= \text{Trace}((A^T + C^T) \cdot B) \\ &= \text{Trace}(A^T B + C^T B) \\ &= \text{Trace}(A^T B) + \text{Trace}(C^T B) \end{aligned}$$

9.2 Produit scalaire: définition, exemples



Donc $\langle A, B \rangle$ donc c'est la trace de $B^T A$. De plus la trace de la transposée d'une matrice, c'est la même que la trace de la matrice, car les éléments de la diagonale ne changent pas. Et puis, dans un exercice, vous avez vu que si on fait la transposée d'un produit, c'est le produit des transposées dans l'autre sens, où éventuellement, j'ai fais ça en cours, je ne me souviens pas. Donc j'ai la trace de $A^T (B^T)^T$ et ça c'est la trace de $A^T B$. Et puis ça c'est $\langle A, B \rangle$. Donc c'est bien symétrique : $\langle B, A \rangle$ est égal à $\langle A, B \rangle$. Et puis maintenant, on doit vérifier la linéarité. Donc si je fais $\langle A + C, B \rangle$, par définition, c'est la trace de $(A + C)^T B$. On sait que faire la transposée est linéaire, donc ça c'est la trace de $(A^T + C^T) B$. Maintenant, la multiplication distribue. Donc ça c'est la trace de $A^T B + C^T B$. La trace est une application linéaire donc ça c'est la trace de $A^T B$ plus la trace de $C^T B$. Ça c'était l'exercice que la trace est une application linéaire.

Notes

Summary



6m 57s

Exemples.

(1) Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$

$$u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Exercice: vérifier que les 4 axiomes sont
satisfaits. $u, v \in M_{1 \times n}(\mathbb{R}), u \cdot v = u \cdot v^T \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$.

(2) $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$A, B \in V, A = (a_{ij}),$$

$$\text{Trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

$$\text{On définit } \langle A, B \rangle = \text{Trace}(A^T B).$$

Vérifions que $\langle, \rangle$ est bien un
produit scalaire sur V .

$$\bullet \text{Trace}(A^T B) \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \langle B, A \rangle = \text{Trace}(B^T A) = \text{Trace}((B^T A)^T) \\ = \text{Trace}(A^T (B^T)^T) = \text{Trace}(A^T B) = \langle A, B \rangle.$$

$$\begin{aligned} \bullet \langle A+C, B \rangle &= \text{Trace}((A+C)^T B) \\ &= \text{Trace}(A^T B + C^T B) \\ &= \text{Trace}(A^T B) + \text{Trace}(C^T B) \\ &= \langle A, B \rangle + \langle C, B \rangle, \text{ pour tout } A, B, C \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lambda \in \mathbb{R}, A \in V, B \in V \\ \langle \lambda A, B \rangle &= \text{Trace}((\lambda A)^T B) \\ &= \text{Trace}(\lambda A^T B) \\ &= \lambda \text{Trace}(A^T B) = \lambda \langle A, B \rangle. \end{aligned}$$

$$\bullet A \in V, \langle A, A \rangle =$$

9.2 Produit scalaire: définition, exemples

Et donc ceci est égal à $\langle A, B \rangle + \langle C, B \rangle$. Donc c'est linéaire à gauche et par la symétrie, c'est linéaire à droite. Et puis, maintenant les scalaires. Donc ici, ça c'est pour tout A, B, C dans V . Maintenant, je prends λ , un scalaire, et A dans V . Excusez-moi, A et B dans V aussi. Alors $\langle \lambda A, B \rangle$, c'est par définition la trace de $(\lambda A)^T B$ qui est la trace, maintenant la transposée est linéaire, donc ça c'est $\lambda A^T B$. Et puis trace est une application linéaire donc ce λ sort. C'est λ fois la trace de $A^T B$. Et ça c'est $\lambda \langle A, B \rangle$. Donc les scalaires sortent comme il faut. Et puis enfin, maintenant, je dois faire ce qu'on dit, on appelle ça d'être défini positif, j'avais oublié de préciser. Donc cette dernière propriété ici, je prends A dans V et je fais le produit scalaire, bon ça ça serait un produit scalaire de A avec lui-même. Ça c'est la trace de $A^T A$. Et ça c'est la somme, donc je dois calculer les composantes ii de cette matrice, donc la somme de i égal 1 jusqu'à n .

Notes

Summary



Exemples.

(1) Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$

$$u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Exercice: vérifier que les 4 axiomes sont satisfaits. $u, v \in M_{1 \times n}(\mathbb{R}), u \cdot v = u \cdot v^T \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$.

(2) $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$A, B \in V, A = (a_{ij}),$$

$$\text{Trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

$$\text{On définit } \langle A, B \rangle = \text{Trace}(A^T B).$$

Vérifions que $\langle, \rangle$ est bien un produit scalaire sur V .

- $\text{Trace}(A^T B) \in \mathbb{R}$.
- $\langle B, A \rangle = \text{Trace}(B^T A) = \text{Trace}((B^T A)^T) = \text{Trace}(A^T (B^T)^T) = \text{Trace}(A^T B) = \langle A, B \rangle$.

$$\begin{aligned} \cdot \langle A+C, B \rangle &= \text{Trace}((A+C)^T B) \\ &= \text{Trace}(A^T + C^T) \cdot B \\ &= \text{Trace}(A^T B + C^T B) \\ &= \text{Trace}(A^T B) + \text{Trace}(C^T B) \\ &= \langle A, B \rangle + \langle C, B \rangle, \text{ pour tout } A, B, C \in V \\ \cdot \lambda \in \mathbb{R}, A \in V, B \in V \\ \langle \lambda A, B \rangle &= \text{Trace}((\lambda A)^T B) \\ &= \text{Trace}(\lambda A^T B) \\ &= \lambda \text{Trace}(A^T B) = \lambda \langle A, B \rangle. \\ \cdot A \in V, \langle A, A \rangle &= \text{Trace}(A^T A) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n (A^T)_{ik} A_{ki} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ki} \cdot A_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (A_{ki})^2 \geq 0 \\ \text{Si } = 0 \text{ alors } A_{ki} &= 0 \text{ pour tout } i, k \Rightarrow A = 0. \end{aligned}$$

9.2 Produit scalaire: définition, exemples



Et puis maintenant, pour la ii -ème composante, c'est la somme $k=1$ jusqu'à n de $(A^T)_{ik} A_{ki}$. Et maintenant, ça c'est la somme pour $i=1$ jusqu'à n de la somme pour $k=1$ jusqu'à n de... Maintenant la ik -ème composante de A^T c'est A_{ki} . fois A_{ki} . Donc du coup, j'ai une somme ici, une grande somme, de carrés de nombres réels. Donc ça c'est sûrement non-négatif car ce sont des nombres réels au carré. Et puis si c'est égal à 0, il faut que chaque terme-là soit égal à 0. C'est-à-dire $A_{ki} = 0$, pour tout i et k . Donc la matrice A c'est la matrice nulle. Donc voilà, on a tout démontré. C'est un nombre réel associé aux deux matrices A et B . C'est symétrique. C'est additif à gauche. Les scalaires sortent à gauche, donc c'est linéaire à gauche et par symétrie, à droite. Et puis, cette propriété-là, donc c'est un produit scalaire. On a fini la vérification.

Notes

Summary



10m 58s

- (3) Soit $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ fonction continue}\}$. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in V$, on définit

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f g \, dx.$$

9.2 Produit scalaire: définition, exemples



Je veux juste profiter pour ajouter une remarque. Encore une remarque que j'aurais pu faire avant. C'est que la propriété numéro quatre, c'est-à-dire que $\langle u, u \rangle$ est positif et si $\langle u, u \rangle = 0$, alors u est égal à 0. Cette propriété-là s'appelle définie positivité, donc on dit que la propriété décrite par ceci est défini positif. Voilà, donc cette propriété-là, au lieu de l'écrire en long, des fois, on dit simplement que ce produit scalaire est défini positif. Bon, ça fait partie de la définition mais cette condition-là dit le fait d'être défini positif. On avait symétrique, linéaire à gauche et à droite et puis défini positif. Et maintenant, un dernier exemple un peu plus compliqué. D'ailleurs, nettement plus compliqué. Alors, je prends l'espace vectoriel qui est très grand, de dimension infinie. C'est les fonctions continues d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $[a, b]$ est fixe. Et puis, je définis ce qui sera un produit scalaire sur V de la façon suivante : Pour f et g dans V , je fais l'intégrale sur cet intervalle du produit $f \cdot g$. Maintenant, les trois premières propriétés sont faciles à vérifier donc je ne les fais pas.

Notes

Summary



12m 37s

(3) Soit $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ fonction continue}\}$. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in V$, on définit

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f g \, dx. \quad \in \mathbb{R} \quad \checkmark$$

$$(1) \quad \int_a^b f g \, dx = \int_a^b g f \, dx$$

$$(2) \text{ et } (3) \quad \int_a^b (\mu \cdot h + p) \, dx = \mu \int_a^b h \, dx + \int_a^b p \, dx.$$

$$(4) \quad \text{défini positif?} \quad f \in V, \quad \langle f, f \rangle = \int_a^b f \cdot f \, dx =$$

9.2 Produit scalaire: définition, exemples



Je vais juste remarquer que c'est facile. Donc les conditions 0 : Bon déjà, c'est effectivement un nombre réel, donc ça c'est OK. Et puis la condition 1 que c'est symétrique, c'est parce que le produit $g \cdot f$ c'est le même que le produit $f \cdot g$. Donc ça c'est facile. Et les propriétés 2 et 3 sont vérifiées, simplement car l'intégrale est une fonction linéaire. Donc on sait que l'intégrale de $(\mu h + p) \, dx$ est égal, donc sur l'intervalle $[a, b]$, est égal à μ fois l'intégrale de a à b de la fonction h plus l'intégrale de a à b de la fonction p . Donc l'intégrale est linéaire dans ce sens-là et c'est pour ça qu'on a la linéarité qu'il faut dans le produit scalaire. Donc ce qui est intéressant c'est de vérifier que cette définition-là donne quelque chose de défini positif. Donc je pose la question. Je prends f dans V et je veux calculer f avec lui-même, comme ça. Ça c'est l'intégrale de a à b de $f \cdot f$. L'intégrale de a à b de $f^2 \, dx$.

Notes

Summary



14m 35s

(3) Soit $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ fonction continue}\}$. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in V$, on définit

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b fg \, dx. \quad \in \mathbb{R} \quad \checkmark$$

$$(1) \quad \int_a^b fg \, dx = \int_a^b gf \, dx$$

$$(2) \text{ et } (3) \quad \int_a^b (\mu \cdot h + p) \, dx = \mu \int_a^b h \, dx + \int_a^b p \, dx.$$

$$(4) \quad \text{défini positif?} \quad f \in V, \quad \langle f, f \rangle = \int_a^b f \cdot f \, dx = \int_a^b f^2 \, dx. \quad \begin{array}{l} f^2 \geq 0 \\ \text{c-à-d } f^2(x) \geq 0 \\ \text{pour tout } x \in [a, b]. \end{array}$$

dnc $\int_a^b f^2 \, dx \geq 0.$

$$\text{Si } \int_a^b f^2 \, dx = 0 \Rightarrow f^2 = 0 \Rightarrow f = 0.$$

(important que f soit continue)

9.2 Produit scalaire: définition, exemples



Donc maintenant, f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et puis f^2 c'est une fonction qui reste non-négative, c'est-à-dire f^2 appliqué à x est positif, ou non-négatif, pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$. Et si on fait l'intégrale d'une fonction qui reste non-négative, comme on calcule la surface en-dessous de cette fonction, alors c'est un nombre non-négatif. Et puis si cette intégrale-là est égale à 0, comme f est continue, et comme j'ai dit avant, ça calcule la surface en-dessous ou bornée par la fonction de f , les droites $x = a$, $x = b$ et l'axe des x , alors comme f^2 est continue, et ça, ça implique que f^2 est 0 et ça implique que f est la fonction nulle. Ici, c'est très important que f soit continue. Donc voilà, ça c'est un exemple dans un espace de dimension infinie. Donc ça c'est un produit scalaire mais ça donne pas un espace euclidien parce que la définition de l'espace euclidien c'est que la dimension de l'espace qu'on considère est finie. Maintenant, nous continuerons à étudier le produit scalaire ou bien les espaces munis d'un produit scalaire.

Notes

Summary



16m 21s