



9.3 Norme, inégalité de Cauchy-Schwarz



Dans cette vidéo, nous allons introduire une géométrie dans les espaces munis d'un produit scalaire en général, donc pas que $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire usuel mais en général. Donc on va définir une longueur, une distance entre vecteurs et des angles entre des vecteurs.

Notes

Summary



0m 03s

Définition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On définit la **norme** de $v \in V$, notée $\|v\|$, par $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. *← bien défini car $\langle v, v \rangle \geq 0 \Rightarrow \|v\| \in \mathbb{R}$.*

On définit la **distance** entre deux vecteurs $u, v \in V$ d'être $\|u - v\|$.

Propriétés: (1) $\|v\| \in \mathbb{R}$ et $\|v\| \geq 0$



9.3 Norme, inégalité de Cauchy-Schwarz

On commence par ce qu'on appelle la norme de v . Donc je me donne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire comme donné. On définit la norme d'un vecteur dans V et on la dénote avec les doubles barres des deux côtés par ça. C'est la racine carrée du produit scalaire du vecteur avec lui-même. Il faut noter que ça a un sens. Donc ça, c'est bien défini car ce $\langle v, v \rangle$ est plus grand ou égal à zéro, pour tout v . Donc on peut prendre la racine carrée et ça donne un nombre réel. Donc cette norme de v est un nombre réel. Et puis on définit la distance entre deux vecteurs qui doit être la norme de la différence. Maintenant, je cite quelques propriétés. Propriétés. D'abord, comme je viens de dire, la norme de v est un nombre réel et c'est un nombre réel plus grand ou égal à zéro. Et puis de plus, donc c'est un nombre réel parce que c'est la racine carrée d'un nombre non-négatif, c'est la racine carrée d'un nombre non-négatif donc c'est non-négatif, et de plus, la norme est égale à zéro si et seulement si le carré de la norme est égal à zéro, si et seulement si $\langle v, v \rangle$ est égal à zéro car c'est le carré de la norme, si et seulement si v est égal à zéro.

Notes

Summary



0m 24s

Définition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On définit la **norme** de $v \in V$, notée $\|v\|$, par $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. *← bien défini car $\langle v, v \rangle \geq 0 \Rightarrow \|v\| \in \mathbb{R}$.*

On définit la **distance** entre deux vecteurs $u, v \in V$ d'être $\|u - v\|$.

Propriétés: (1) $\|v\| \in \mathbb{R}$ et $\|v\| \geq 0$

(2) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow \|v\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

(3) $\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\alpha| \cdot \|v\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
 $v \in V$.

9.3 Norme, inégalité de Cauchy-Schwarz



Donc si la norme est égale à zéro alors le vecteur est nul. Et puis, troisième. Que se passe-t-il si on fait la norme d'un multiple scalaire d'un vecteur ? Alors ça c'est, par définition, la racine carrée du produit scalaire $\langle \alpha v, \alpha v \rangle$. Comme le produit scalaire est bilinéaire donc je peux sortir le α deux fois. Maintenant, α est un nombre réel, la racine carrée c'est multiplicatif. Et puis α est un nombre réel donc la racine carrée du carré de α , c'est la valeur absolue de α . Et puis ça c'est la norme de v . Donc si on fait la norme d'un multiple scalaire, alors ça donne la valeur absolue du scalaire fois la norme de v et ça pour tout α nombre réel et pour tout v dans V . Donc ça c'est la notion de longueur d'un vecteur. On appelle ça la norme ou bien la distance entre deux vecteurs. Et maintenant, que se passe-t-il si on veut essayer de faire plus de géométrie, c'est-à-dire on veut parler des angles entre des vecteurs ?

Notes

Summary



2m 02s

L'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ pour tous $u, v \in V$.

Preuve: Soient $u, v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle \lambda u + v, \lambda u + v \rangle \geq 0$$

"

$$\lambda^2 \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \lambda \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

$$\lambda^2 \langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \geq 0$$

9.3 Norme, inégalité de Cauchy-Schwarz



Pour se faire, il faut démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui est l'inégalité suivante : Je me donne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel V muni d'un produit scalaire comme donné. Alors si on fait le produit scalaire de u avec v , en valeur absolue, c'est toujours plus petit ou égal au produit des deux normes, pour tous u et v dans V . Maintenant, je vais donner la preuve. J'aime bien cette preuve. Elle a une jolie idée là-dedans. Donc j'ai u et v , des vecteurs. Donc, soit u et v des vecteurs dans V et λ , un scalaire. Alors si on calcule $\langle \lambda u + v, \lambda u + v \rangle$, par les axiomes d'un produit scalaire, on sait que c'est un nombre réel plus grand ou égal à zéro. Et puis, si je développe ça, ça me donne : $\lambda^2 \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \lambda \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$ Et donc, comme c'est symétrique, ça c'est : $\lambda^2 \langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$ Et ça c'est un nombre réel plus grand ou égal à zéro pour tout λ . Maintenant, considérons la fonction quadratique $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = x^2 \langle u, u \rangle + 2x \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$ Maintenant c'est une fonction quadratique, on sait qu'on peut représenter ça par un graphique qui est une parabole et puis ça reste au-dessus de l'axe des x .

Notes

Summary



3m 17s

L'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ pour tous $u, v \in V$.

Preuve: Soient $u, v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle \lambda u + v, \lambda u + v \rangle \geq 0$$

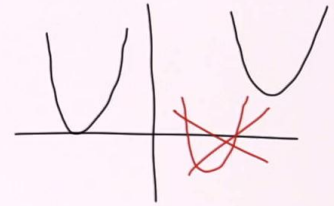
"

$$\lambda^2 \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \lambda \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

$$\lambda^2 \langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \geq 0$$

Considérons la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \langle u, u \rangle + 2x \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \geq 0$

On déduit que le discriminant est ≤ 0 .



9.3 Norme, inégalité de Cauchy-Schwarz



Donc ça veut dire que si je fais le graphique de f , donc il y a plusieurs possibilités. Donc peut-être qu'elle se situe entièrement là-haut et ça veut dire que c'est strictement plus grand que zéro pour tout x . Éventuellement, ça touche l'axe un petit peu. Donc ça c'est quand ça prendra la valeur zéro. Mais ce n'est pas permis. Ce n'est pas possible que f se comporte comme ça parce que à ce moment-là, si elle coupe deux fois l'axe, ou bien elle reste de toute façon positive, donc ça c'est un nombre positif, elle est tournée vers le haut. Si elle coupe deux fois l'axe, alors ça voudra dire qu'elle est des fois négative et ce n'est pas le cas. Donc ça ce n'est pas le cas. Elle reste vraiment au-dessus donc ça veut dire que le discriminant de cette équation quadratique est au plus zéro. On déduit que le discriminant est plus petit ou égal à zéro parce que si c'est plus grand que zéro alors on aura deux racines et ça veut dire qu'elle coupe l'axe et passe en-dessous, ça ne va pas. Maintenant, pour calculer le discriminant. Ici, quels sont les coefficients ? Donc ici, c'est le coefficient... Donc ça c'est le coefficient de x^2 .

Notes

Summary



L'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ pour tous $u, v \in V$.

Preuve: Soient $u, v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle \lambda u + v, \lambda u + v \rangle \geq 0$$

"

$$\lambda^2 \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \lambda \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

$$\lambda^2 \langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \geq 0$$

Considérons la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \langle u, u \rangle + 2x \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \geq 0$

On déduit que le discriminant est ≤ 0 .

discriminant de f est $(2\langle u, v \rangle)^2 - 4\langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle \leq 0$.

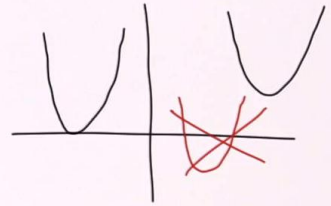
$$4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$$

$$4\langle u, v \rangle^2 \leq 4\|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

□



9.3 Norme, inégalité de Cauchy-Schwarz



Le coefficient de x c'est deux fois ça et le terme constant c'est ça. Donc le discriminant de f c'est ça au carré, donc $(2\langle u, v \rangle)^2 - 4\langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle$ Et puis ça doit être au plus zéro. Et maintenant on peut conclure parce qu'on a tous les ingrédients. Donc ici, ceci est égal à $4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2 \cdot \|v\|^2$ qui est plus petit ou égal à zéro. Donc j'ai $4\langle u, v \rangle^2$ plus petit ou égal à $4\|u\|^2 \cdot \|v\|^2$ Maintenant je divise par quatre. Et puis j'ai $\langle u, v \rangle^2$ plus petit ou égal à $\|u\|^2 \cdot \|v\|^2$ Et puis je prends les racines carrées et j'ai la valeur absolue de $|\langle u, v \rangle|$ plus petit ou égal à $\|u\| \cdot \|v\|$ Et ça c'est ce que dit l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc ça c'est joli. J'aime bien cette démonstration où on introduit cette fonction quadratique. Maintenant, avec ça on peut définir ce que c'est l'angle entre deux vecteurs.

Notes

Summary



6m 50s

Maintenant on peut définir les angles !

Définition. Soient V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $u, v \in V$ deux vecteurs non-nuls. On définit l'angle entre u et v par l'**unique angle** θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, tel que :

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

L'angle θ est bien défini car Cauchy-Schwarz

$$\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$$



9.3 Norme, inégalité de Cauchy-Schwarz



Maintenant. Alors je me donne de nouveau un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire et deux vecteurs là-dedans. On définit l'angle entre u et v d'être l'unique angle entre zéro et π . Donc je restreins l'intervalle où se trouve l'angle comme ça c'est unique, tel que le cosinus de cet angle est égal à ce quotient-là. Maintenant, pourquoi ça à un sens ? Donc θ est bien défini car l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que la valeur absolue de $\langle u, v \rangle$ est plus petit ou égale au produit des deux normes. Et donc ça, ça implique que ce nombre $\langle u, v \rangle$ divisé par le produit des normes en valeur absolue est plus petit ou égal à 1, donc se situe entre 1 et -1. Donc quand on a une valeur, un nombre réel, entre -1 et 1, on sait qu'il existe un angle, ou bien plusieurs angles, tels que cette valeur-là c'est le cosinus de l'angle. Mais comme ici on restreint l'intervalle de θ , il existe un unique θ entre 0 et π , tel que $\cos \theta$ soit égal à cette valeur-là. Donc ça veut dire que dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, donc quelconque, alors on peut parler de l'angle entre deux vecteurs non nuls. Et puis la relation, je pourrais écrire ça différemment, on a que : $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$ où θ est l'angle entre u et v .

Notes

Summary



8m 28s