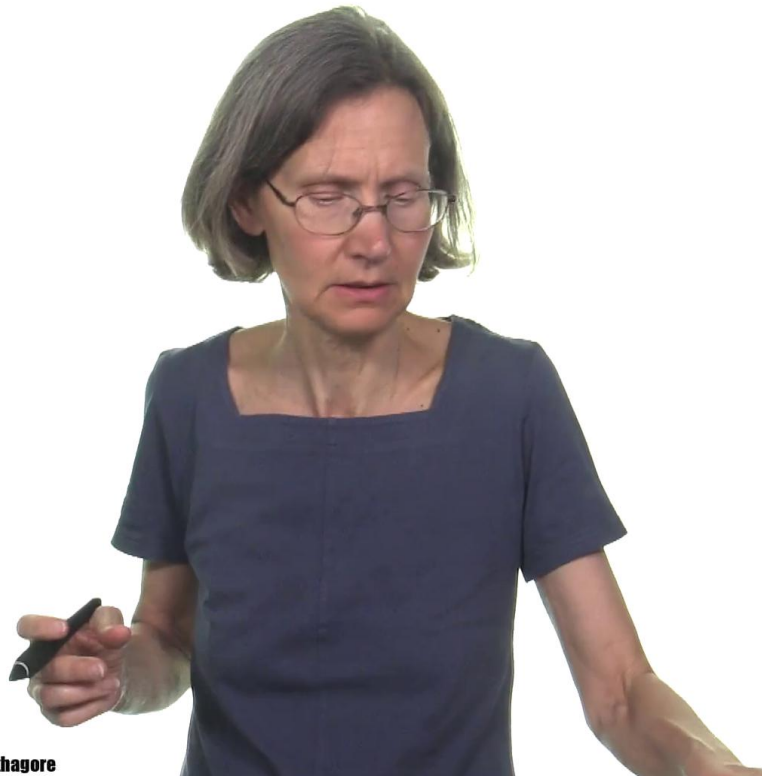




9.4 Orthogonalité, inégalité du triangle, Pythagore



Maintenant que nous avons vu la notion de longueur et d'angle entre deux vecteurs dans un espace muni d'un produit scalaire, nous pouvons introduire la notion d'orthogonalité de deux vecteurs. Nous allons voir quelques résultats familiers dans la géométrie euclidienne classique.

Notes

Summary



0m 04s

Définition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient $u, v \in V$. On dit que u et v sont orthogonaux ou que u est orthogonal à v si $\langle u, v \rangle = 0$.

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cos \theta \quad \text{où } \theta \text{ est l'angle entre } u \text{ et } v.$$

$$\langle u, v \rangle = 0 \iff \|u\| \cdot \|v\| \cos \theta = 0.$$

$$\iff \begin{cases} u = 0, \text{ ou} \\ v = 0, \text{ ou} \\ \cos \theta = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } \cos \theta = 0, \text{ comme } 0 \leq \theta \leq \pi, \text{ on a que } \theta = \pi/2.$$

9.4 Orthogonalité, inégalité du triangle, Pythagore



Je me donne de nouveau un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire et deux vecteurs u, v dans V . On dit que u et v sont orthogonaux ou bien que u est orthogonal à v et que v est orthogonal à u parce que c'est une condition symétrique, si le produit scalaire de u avec v est nul. Maintenant cela fait sens parce que nous savons ce que signifie orthogonal dans la géométrie usuelle et ça signifie que les deux vecteurs sont perpendiculaires. Si je pose (u, v) , ceci est égal à la norme de u fois la norme de v fois le cosinus de l'angle θ où θ est l'angle qu'on a défini entre u et v . Donc ici, $(u, v) = 0$ si et seulement si $\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta) = 0$. Maintenant si et seulement si il se peut que $u = 0$, il se peut que $v = 0$ ou bien que le cosinus de θ soit 0. Dans le dernier cas, si $\cos(\theta) = 0$, comme θ est entre 0 et π , on trouve que $\theta = \pi/2$ et on retrouve notre notion d'orthogonalité, ces deux vecteurs ont un angle de $\pi/2$ entre eux deux. On peut démontrer deux résultats.

Notes

Summary



Proposition. Soit V comme avant.

- (1) **Inégalité du triangle.** Pour $u, v \in V$,
 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
- (2) **Pythagore.** Soient $u_1, \dots, u_t \in V$, des vecteurs deux à deux orthogonaux, i.e.
 $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. Alors

$$\|u_1 + \dots + u_t\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_t\|^2.$$

Dans le cas $t=2$, $V=\mathbb{R}^2$, on retrouve le théorème de Pythagore : $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$



9.4 Orthogonalité, inégalité du triangle, Pythagore



Notes

On a d'abord l'inégalité du triangle, c'est une inégalité que nous avons dans les nombres réels. Nous avons aussi le théorème de Pythagore généralisé. L'inégalité du triangle dit que si on a deux vecteurs dans un espace muni d'un produit scalaire, donc je rappelle. Soit V comme avant, donc un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Ensuite je prends deux vecteurs dans V . La norme de $u + v$ est au plus la somme des normes et si je prends t vecteurs dans V et qu'ils sont tous deux-à-deux orthogonaux c'est-à-dire que si je prends u_i et u_j pour i différent de j , ils sont orthogonaux. Alors, la norme carrée de la somme est égal à la somme des carrés des normes. Donc dans le cas où $t = 2$, on retrouve le théorème de Pythagore. Donc on a la notion d'orthogonalité usuelle. Si je prends deux vecteurs u_1 et u_2 dans $\mathbb{R}^2$ et je les dessine. Et ce vecteur-là, c'est la somme $u_1 + u_2$. Donc là j'ai un triangle rectangle parce que les deux vecteurs sont orthogonaux.

Summary



2m 14s

Proposition. Soit V comme avant.

(1) **Inégalité du triangle.** Pour $u, v \in V$,
 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

← exercice.

(2) **Pythagore.** Soient $u_1, \dots, u_t \in V$, des vecteurs deux à deux orthogonaux, i.e. $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. Alors

$$\|u_1 + \dots + u_t\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_t\|^2.$$

Dans le cas $t=2$, $V=\mathbb{R}^2$, on retrouve le théorème de Pythagore : $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$



$$\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 = \|u_1 + u_2\|^2$$

Preuve du 2

$$\|u_1 + \dots + u_t\|^2 = \langle u_1 + \dots + u_t, u_1 + \dots + u_t \rangle.$$

Comme $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pour tout $i \neq j$, on a

$$\begin{aligned} \langle u_1 + \dots + u_t, u_1 + \dots + u_t \rangle &= \\ \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle + \dots + \langle u_t, u_t \rangle &= \\ = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_t\|^2. \end{aligned}$$

□

9.4 Orthogonalité, inégalité du triangle, Pythagore



Le théorème de Pythagore, dans ce cas, dit exactement que la longueur ici est la norme de u_1 au carré, que la longueur là est la norme de u_2 au carré qui est égal à la norme ici de l'autre côté au carré. Je vous laisse faire le premier point exercice. Il faut seulement écrire ce qu'est la norme de $u + v$ et développer. Ensuite pour la deuxième partie, je veux faire la norme au carré de $u_1 + \dots + u_t$, donc par définition, ceci est égal à $(u_1 + \dots + u_t, u_1 + \dots + u_t)$ et comme le produit scalaire $(u_i, u_j) = 0$, pour tout i différent de j , quand je développe tout ça, en utilisant la linéarité des deux côtés, on se retrouve avec seulement les termes tels que la somme $(u_1, u_1) + (u_2, u_2) + \dots$, qui est la somme des carrés des normes. Voilà la preuve du deuxième point de la proposition. Je veux maintenant faire un exemple, un assez long calcul car je veux vous habituer à travailler dans les espaces (munis d'un produit scalaire) de dimension infinie et aussi avec des produits scalaires autres que le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.

Notes

Summary



3m 56s

Exemple.

Soit $V = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ les fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, avec produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f g \, dx, \quad f, g \in V.$$

Montrer que $f(x) = x^{2m}$ et $g(x) = x^{2n+1}$ sont orthogonaux pour tous entiers m, n .

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 x^{2m} \cdot x^{2n+1} \, dx = \int_{-1}^1 x^{2n+2m+1} \, dx$$



9.4 Orthogonalité, inégalité du triangle, Pythagore

Donc je reviens à un espace de fonctions. Je prends les fonctions continues sur l'intervalle $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et je définis le produit scalaire, qui est l'intégrale de -1 à 1 du produit des deux fonctions. Ensuite je prétends que, si je prends des polynômes de degré pair, donc par exemple f , c'est un monôme de degré pair, et puis g un monôme de degré impair, donc les puissances paires ou bien les puissances impaires de x , alors que ces deux fonctions-là sont orthogonales pour tout m et n donc n'importe quel polynôme de degré pair ici, sera orthogonal à un polynôme de degré impair. Je vais développer cela. J'ai (f, g) et je dois montrer que ceci est égal à 0 . Donc ceci est l'intégrale de -1 à 1 de la fonction $x^{2m} x^{2n+1}$. I.e. l'intégrale de -1 à 1 de la fonction $x^{2n+2m+1}$. Maintenant cela est égal à l'intégrale de -1 à 0 de la fonction $x^{2n+2m+1}$, plus l'intégrale de 0 à 1 de la même fonction et je veux vous faire remarquer que ceci est une fonction impaire, c'est-à-dire que si je fais $g(-x)$ j'obtiens $-g(x)$.

Notes

Summary



6m 01s

Exemple.

Soit $V = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ les fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, avec produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f g \, dx, \quad f, g \in V.$$

Montrer que $f(x) = x^{2m}$ et $g(x) = x^{2n+1}$ sont orthogonaux pour tous entiers m, n .

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 x^{2m} \cdot x^{2n+1} \, dx = \int_{-1}^1 \underbrace{x^{2n+2m+1}}_{\substack{\text{fonction impaire} \\ g(-x) = -g(x)}} \, dx = \int_{-1}^0 x^{2n+2m+1} \, dx + \int_0^1 x^{2n+2m+1} \, dx = 0.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Alternative:} \\ \frac{1}{2n+2m+2} x^{2n+2m+2} \Big|_{-1}^1 \\ = \frac{1}{2n+2m+2} (1 - (-1)) = 0 \end{array} \right)$$

9.4 Orthogonalité, inégalité du triangle, Pythagore



Donc cela signifie que cette valeur-ci est le négatif de cette valeur-là. Et cela donne 0. Maintenant si vous ne voulez pas procéder comme cela, vous pouvez développer ici, donc alternative : Je le mets entre parenthèses. C'est que je fais vraiment le calcul donc ici je cherche une primitive de cela donc j'ai $1/(2n+2m+2) \cdot x^{2n+2m+2}$ que je dois évaluer entre -1 et 1 et donc Je substitue donc 1 et je substitue -1, mais comme c'est une puissance paire, ça c'est aussi 1 et cela donne 0. Donc ou bien on reconnaît que ceci est une fonction impaire donc sur un intervalle symétrique comme ceci, alors nous obtiendrons une intégrale de 0, ou bien on fait le calcul. Donc ces fonctions sont orthogonales, c'est-à-dire que les fonctions f et g sont orthogonales. Maintenant, je vais illustrer le théorème de Pythagore dans cet exemple.

Notes

Summary



7m 44s

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^1 x^{4m} dx = \frac{1}{4m+1} x^{4m+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4m+1} (1 - (-1)) = \frac{2}{4m+1}$$

$$\|g\|^2 = \int_{-1}^1 x^{4n+2} dx = \dots = \frac{2}{4n+3}$$

$$\|f+g\|^2 = \int_{-1}^1 (x^{2m} + x^{2n+1})^2 dx = \int_{-1}^1 (x^{4m} + \underbrace{2x^{2m+2n+1}}_{\int_{-1}^1 = 0} + x^{4n+2}) dx = \frac{2}{4m+1} + \frac{2}{4n+3}$$

□

9.4 Orthogonalité, inégalité du triangle, Pythagore

Je fais la norme de f au carré, donc ça c'est l'intégrale de -1 à 1 de la fonction x^{4m} . Donc j'ai multiplié x^{2m} avec x^{2m} . Donc ça c'est $1/(4m+1) \cdot x^{4m+1}$ évalué entre -1 et 1 , donc ça c'est $1/(4m+1) \cdot (1 - (-1))$. Donc j'ai $2/(4m+1)$ et puis la norme de g au carré, cette fois je vais sauter une étape, donc c'est l'intégrale de -1 à 1 de la fonction x^{4n+2} , et puis je saute quelques étapes, et j'ai $2/(4n+3)$. La norme de $f + g$ au carré, c'est l'intégrale de -1 à 1 de la fonction $(x^{2m} + x^{2n+1})^2$. Et c'est l'intégrale de $x^{4m} + 2x^{4n+2} + 2x^{2m+2n+1}$. Puis en séparant, on sait que ce terme-là va donner une intégrale égale à 0 et nous avons déjà calculé les deux autres alors effectivement c'est $2/(4m+1) + 2/(4n+3)$. Voilà une illustration du théorème de Pythagore dans le cas d'un espace de fonctions.

Notes

Summary

