



9.5 Bases orthogonales, bases orthonormales/orthonormées



Maintenant que nous avons introduit la géométrie dans nos espaces vectoriels, nous aimerions faire un lien entre cette géométrie et les bases. Comme on sait que les bases sont... ça nous donne quelque chose de très utile quand on étudie les espaces vectoriels donc on veut faire un lien entre cette notion de base et le produit scalaire et puis la géométrie. Et ça, ça viendra avec ce qu'on appelle les bases orthogonales ou bien les bases orthonormales. Je vais donner la définition maintenant.

Notes

Summary



0m 03s

Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition. Soit $S \subset V$.

- (1) On dit que S est une **famille orthogonale** si $\langle u, v \rangle = 0$ pour tous $u \neq v \in S$. Aussi si S est une base de V , on parle de **base orthogonale**.
- (2) On dit que S est une **famille orthonormale** ou **orthonormée** si S est une famille orthogonale et $\langle u, u \rangle = 1$ pour tout $u \in S$. Aussi, si S est une base de V , on parle de **base orthonormale** ou **orthonormée**.

Exemple



9.5 Bases orthogonales, bases orthonormales/orthonormées



Je me donne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, pas forcément un espace euclidien, et puis un ensemble dans V . On dit que S est une famille orthogonale si u produit scalaire avec v est égal à 0 pour tous u dans S . Comme on avait parlé pour deux vecteurs ce que ça veut dire d'être orthogonaux, donc la famille est orthogonale si chaque paire de vecteurs comprend... donc paire vraiment de vecteurs différents, là-dedans, ont la propriété que l'un est orthogonal à l'autre. Et puis, si S est une base de V , avec cette propriété, on parle de base orthogonale. Ensuite, on dit que S est une famille orthonormale, ou bien orthonormée, on utilise les deux mots, si d'abord c'est une famille orthogonale, donc cette propriété-là, et en plus, tous les vecteurs dans cette famille sont de norme 1. En plus, si S est une base, on parle de base orthonormale ou bien de base orthonormée. Maintenant, voilà quelques exemples. Il y a l'exemple de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc je prends $V = \mathbb{R}^n$, c'est l'exemple 1.

Notes

Summary



0m 36s

Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition. Soit $S \subset V$.

- (1) On dit que S est une **famille orthogonale** si $\langle u, v \rangle = 0$ pour tous $u \neq v \in S$. Aussi si S est une base de V , on parle de **base orthogonale**.
- (2) On dit que S est une **famille orthonormale** ou **orthonormée** si S est une famille orthogonale et $\langle u, u \rangle = 1$ pour tout $u \in S$. Aussi, si S est une base de V , on parle de **base orthonormale** ou **orthonormée**.

Exemples ① $V = \mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, noté $u \cdot v$.

*$C = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de V ; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ...
 $i \neq j, e_i \cdot e_j = 0$ et $e_i \cdot e_i = 1$. C est une base orthonormée.*

9.5 Bases orthogonales, bases orthonormales/orthonormées



V l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel que je vais noter $u \cdot v$. Et puis je prends la base préférée $e_1, \dots, e_n$, la base canonique de V . Donc c'est-à-dire, le e_1 , c'est $(1, 0, \dots, 0)$, le e_2 , c'est $(0, 1, 0, \dots, 0)$, etc. Et puis maintenant, si on fait le produit scalaire de e_i avec e_j , pour i différent de j , alors c'est clair qu'on fait les produits successifs, et chaque produit est égal à 0, donc ça donne 0. Et si on fait le produit scalaire de e_i avec lui-même, on aura, par exemple pour le produit scalaire de e_1 avec e_1 , on aura $1 \cdot 1$ et les autres sont 0, donc ça, ça donne 1. Donc ça c'est à la fois une base qui est orthogonale et aussi tous les vecteurs dedans ont norme 1, donc ça c'est une base orthonormée. Donc cette base-là. C est une base orthonormée. C'est un exemple. Exemple n° 2 : Prenons V , l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ aussi muni du produit scalaire usuel.

Notes

Summary



Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition. Soit $S \subset V$.

- (1) On dit que S est une **famille orthogonale** si $\langle u, v \rangle = 0$ pour tous $u \neq v \in S$. Aussi si S est une base de V , on parle de **base orthogonale**.
- (2) On dit que S est une **famille orthonormale** ou **orthonormée** si S est une famille orthogonale et $\langle u, u \rangle = 1$ pour tout $u \in S$. Aussi, si S est une base de V , on parle de **base orthonormale** ou **orthonormée**.

Exemples ① $V = \mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, noté $u \cdot v$.

*$C = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de V ; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ...
 $i \neq j, e_i \cdot e_j = 0$ et $e_i \cdot e_i = 1$. C est une base orthonormée.*

② $V = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. $S = \{(2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ $u \cdot v = 0$ $u \cdot u = 5$
 S est une famille orthogonale, non orthonormale.

③ $V = \mathbb{R}^3$, produit scalaire usuel, $B = \{(2, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -2)\}$ $u \cdot w = 2 - 2 = 0$
 $v \cdot w = 0$

9.5 Bases orthogonales, bases orthonormales/orthonormées



Et je prends S , l'ensemble des vecteurs $(2, 0, 1), (0, 1, 0)$ Alors si j'appelle ça u et ça v , on voit que $u \cdot v$, c'est 0. Par contre, la norme de u , donc si je fais u produit scalaire avec lui-même, j'obtiens $4 + 1 = 5$. Et donc ça c'est une famille, pas une base parce qu'il n'y a pas assez de vecteurs, donc c'est une famille orthogonale. Par contre, non orthonormale. Et puis, enfin, un troisième exemple. $V = \mathbb{R}^3$, produit scalaire usuel, et puis B , l'ensemble des vecteurs... Ici, ces deux vecteurs sont linéairement indépendants. Je vais agrandir ça un petit peu. $(2, 0, 1), (0, 1, 0)$ et $(1, 0, -2)$ Maintenant, si j'appelle ça de nouveau u, v et w . On a vérifié que le produit scalaire de u et v est 0, donc ils sont orthogonaux. Si je fais $u \cdot w$, j'obtiens $2 + 0 - 2$, donc c'est 0. Ils sont orthogonaux. Si je fais $v \cdot w$, j'obtiens aussi 0. Donc maintenant, ces trois vecteurs sont linéairement indépendants. Donc ça fait une base, ça c'est une base orthogonale, ce n'est pas une base orthonormale car les vecteurs ne sont pas de norme 1.

Notes

Summary



Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition. Soit $S \subset V$.

- (1) On dit que S est une **famille orthogonale** si $\langle u, v \rangle = 0$ pour tous $u \neq v \in S$. Aussi si S est une base de V , on parle de **base orthogonale**.
- (2) On dit que S est une **famille orthonormale** ou **orthonormée** si S est une famille orthogonale et $\langle u, u \rangle = 1$ pour tout $u \in S$. Aussi, si S est une base de V , on parle de **base orthonormale** ou **orthonormée**.

Exemples ① $V = \mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, noté $u \cdot v$.

*$C = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de V ; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ...
 $i \neq j$, $e_i \cdot e_j = 0$ et $e_i \cdot e_i = 1$. C est une base orthonormée.*

② $V = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. $S = \left\{ \underset{u}{(2, 0, 1)}, \underset{v}{(0, 1, 0)} \right\}$ $u \cdot v = 0$. $u \cdot u = 5$
 S est une famille orthogonale, non orthonormale.

③ $V = \mathbb{R}^3$, produit scalaire usuel, $B = \left\{ \underset{u}{(2, 0, 1)}, \underset{v}{(0, 1, 0)}, \underset{w}{(1, 0, -2)} \right\}$ $u \cdot w = 2 - 2 = 0$. B est une base orthogonale.
 $v \cdot w = 0$

9.5 Bases orthogonales, bases orthonormales/orthonormées



Donc B est une base orthogonale. Et puis maintenant, ça serait joli de savoir, ou ça serait utile, disons, de savoir pourquoi on veut avoir une base orthogonale. Bon, il y a deux raisons. Une, c'est pour la géométrie. Mais il y a une autre raison qui est beaucoup plus simple, et c'est que c'est très, très simple de trouver la représentation d'un vecteur dans l'espace par rapport à une base orthogonale ou bien orthonormée. Donc je vais vous montrer ça.

Notes

Summary



5m 25s

Proposition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthogonale de V . Alors pour tout $v \in V$,

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{\langle v, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} \end{pmatrix},$$

i.e. les coordonnées de v par rapport à la base $\mathcal{B}$ sont $\frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$ pour $1 \leq i \leq n$.
Donc si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, alors

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

9.5 Bases orthogonales, bases orthonormales/orthonormées



Voilà la proposition. Je me donne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de dimension finie donc je fixe une base. Et je suppose que cette base $\mathcal{B}$ est une base orthogonale. Donc pour le moment, pas orthonormale mais juste orthogonale. Alors pour tous v dans V , si je cherche à exprimer v par rapport à cette base-là, c'est très simple. Je fais le produit scalaire de v avec v_1 et je divise par la norme au carré de v_1 . Ainsi de suite et ce sont les coordonnées. Donc c'est-à-dire les coordonnées de v par rapport à cette base sont simplement données par ça. Donc le calcul est beaucoup moins long. C'est très direct. Si vous vous rappelez ce qu'il fallait faire avant pour trouver la représentation d'un vecteur par rapport à une base quelconque, c'est pas si facile. Donc ici, on a une formule. De plus, si cette base est orthonormale, alors toutes ces valeurs en bas, dans le dénominateur des fractions, toutes ces valeurs-là seront égales à 1. Donc du coup, ça devient encore plus simple. C'est que la représentation de v par rapport à une base orthonormale est simplement donnée par la suite des produits scalaires de v avec chaque membre de la base.

Notes

Summary



5m 58s

Proposition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthogonale de V . Alors pour tout $v \in V$,

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{\langle v, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} \end{pmatrix},$$

i.e. les coordonnées de v par rapport à la base $\mathcal{B}$ sont $\frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$ pour $1 \leq i \leq n$.
Donc si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, alors

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

9.5 Bases orthogonales, bases orthonormales/orthonormées



Maintenant, je vais démontrer cette proposition et puis ensuite, je vais l'appliquer à un exemple pour vous montrer à quel point c'est utile. Donc je vais montrer ça parce qu'on voit que ça on déduit directement de ça. Donc je vais commencer avec une base orthogonale.

Notes

Summary



7m 11s

Preuve Soit $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthogonale. Soit $v \in V$.

On a $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ pour $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

$$\langle v, v_i \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_i \rangle$$

9.5 Bases orthogonales, bases orthonormales/orthonormées



Preuve : Je prends une base orthogonale, donc soit B une base orthogonale. Et je prends un vecteur quelconque dans l'espace vectoriel V . Et puis, je sais que je peux écrire v en termes de cette base, donc on a que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ pour certains uniques α_i dans $\mathbb{R}$. Et maintenant, je vais faire le produit scalaire de v avec v_i . Donc je remplace v par cette expression. Donc j'ai $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ avec v_i . Et comme le produit scalaire est linéaire, je peux défaire ça. Donc j'ai $\alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle$. Ainsi de suite. Et puis maintenant, comme $v_1, \dots, v_n$ est une base orthogonale, je sais qu'à chaque fois que la coordonnée ici, ou l'indice ici n'est pas égal à i , ça tombe. Donc, disons qu'ici je suis à i , donc c'est égal à 0.

Notes

Summary



7m 27s

Preuve Soit $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthogonale. Soit $v \in V$.

On a $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ pour $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle v, v_i \rangle &= \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_0 + \alpha_2 \underbrace{\langle v_2, v_i \rangle}_0 + \dots + \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_1 + \dots + \alpha_n \underbrace{\langle v_n, v_i \rangle}_0 \\ &= \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \alpha_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \quad \square$$

Exemple $V = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. $B = ((2, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -2))$.

$v = (a, b, c) \in V$.

9.5 Bases orthogonales, bases orthonormales/orthonormées



0 0 Donc tous les termes sont 0 sauf le terme ici au milieu, $\alpha_i \langle v_i, v_i \rangle$.
Donc ça c'est $\alpha_i \|v_i\|^2$. Et donc ce que je cherchais, c'était ces coordonnées, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Et ici maintenant, je peux déduire la formule.
Donc $\alpha_i = \langle v, v_i \rangle / \|v_i\|^2$ Donc ça c'est la fin de la preuve. Ce n'est donc pas du tout compliqué et puis ça donne vraiment une formule. Et puis maintenant, j'aimerais appliquer ça à un exemple. Donc je vais reprendre un exemple qu'on avait avant. Donc je prends $V = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Je prends la base orthogonale que nous avons vue, donc $(2, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -2)$. Et puis je prends un vecteur quelconque, le vecteur (a, b, c) dans V . Et puis, je peux facilement trouver une formule pour la représentation de ce vecteur par rapport à cette base en utilisant la proposition. Donc par la proposition, si je représente v par rapport à la base B , alors, je fais le produit scalaire de v avec v_1 , ça me donne $2a + c$ et je divise par la norme au carré du premier vecteur de la base, qui est 5.

Notes

Summary



9m 02s

Preuve Soit $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthogonale. Soit $v \in V$.

On a $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ pour $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle v, v_i \rangle &= \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_0 + \alpha_2 \underbrace{\langle v_2, v_i \rangle}_0 + \dots + \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_1 + \dots + \alpha_n \underbrace{\langle v_n, v_i \rangle}_0 \\ &= \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \alpha_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \quad \square$$

Exemple $V = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. $B = ((2, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -2))$.

$v = (a, b, c) \in V$. Par la proposition, $[v]_B = \begin{pmatrix} \frac{2a+c}{5} \\ b \\ \frac{a-2c}{5} \end{pmatrix}$.

(vérification: $\frac{2a+c}{5}(2, 0, 1) + b(0, 1, 0) + \frac{a-2c}{5}(1, 0, -2)$
 $= \left(\frac{4a+2c+a-2c}{5}, b, \frac{2a+c-2a+4c}{5} \right) = (a, b, c) \checkmark$)

9.5 Bases orthogonales, bases orthonormales/orthonormées



Ensuite, je fais le produit scalaire de ce vecteur avec le deuxième, donc ça c'est b , je divise par la norme de ça, qui est égale à 1. Et ensuite, le produit scalaire de ce vecteur avec le troisième vecteur de la base, donc $a - 2c$ divisé par la norme au carré de ce vecteur, donc 5. Et puis ça c'est la représentation. Mais ça, c'est magnifique, c'est vraiment beaucoup plus facile que ce qu'on avait fait avant. Bon, il fallait une base orthogonale. Je vais juste faire une petite vérification. Je sais que c'était démontré mais c'est quand même joli de vérifier. Si je prends $(2a + c) / 5$ qui multiplie $(2, 0, 1) + b$ qui multiplie $(0, 1, 0) + (a - 2c) / 5$ qui multiplie $(1, 0, -2)$. Alors, ça va me donner, dans la première coordonnée, $4a + 2c + 0 + a - 2c$, le tout sur 5. Dans la deuxième coordonnée, j'aurais b . Et dans la troisième coordonnée, j'aurais $2a + c - 2a + 4c$, le tout sur 5. Et puis ceci. Donc ici, les deux c tombent. J'ai $5a / 5$, donc là, j'ai a , b . Ici, les deux a tombent. J'ai $5c / 5 = c$. C'est magnifique. C'est pour ça... C'est une des raisons pour lesquelles nous aimons les bases orthogonales.

Notes

Summary



10m 58s