



9.6 Comment trouver une base orthogonale/orthonormale: première étape

Il faut que je vous montre comment nous allons trouver, en général, une base orthogonale d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel donné. Évidemment, si on a tout l'espace $\mathbb{R}^n$ ou même $\mathbb{R}^3$, on a déjà une bonne base orthonormale, donc on n'aura pas besoin de chercher. Mais dans un espace de fonction, ou même si on est dans $\mathbb{R}^n$ pour n grand et on a un sous-espace, comme le noyau d'une application ou l'image d'une application linéaire ou quelque chose comme ça, dans ce sous-espace, on n'a pas forcément quelque chose comme la base canonique. Il faut chercher une base orthonormale si on veut travailler avec ça. Maintenant, je fais juste la première étape, c'est une procédure assez longue, ça donnerait lieu à ce qu'on appelle l'algorithme ou la procédure de Gram-Schmidt, mais je vais par petits bouts, donc ça, c'est la première étape.

Notes

Summary



0m 03s

Proposition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ une famille orthogonale de vecteurs avec $v_i \neq 0$ pour tout i . Alors $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une famille libre.

Preuve Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$.



9.6 Comment trouver une base orthogonale/orthonormale: première étape



La première chose que nous montrons, c'est que dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, si je me donne une famille orthogonale de vecteurs, sans vecteurs nuls, alors cette famille est forcément libre. Donc, ça, c'est déjà un très bon critère. Ça voudrait dire que, pour trouver une base orthonormale ou orthogonale, disons orthogonale, au début, alors il faudrait simplement trouver le bon nombre de vecteurs tous non nuls, et après on sait que c'est une base. C'est-à-dire le nombre qui est la dimension de l'espace. Donc, je me donne une famille de vecteurs orthogonale, tous les vecteurs non nuls; c'est forcément libre. Donc, d'abord je démontre ça. La preuve n'est pas du tout difficile. En fait, les espaces munis de produits scalaires ont beaucoup de bonnes propriétés. Donc, je vais supposer qu'il y a une relation de dépendance. Donc, je prends les scalaires, soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des nombres réels, tels que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$, soit égal au vecteur nul. Et puis, il faut montrer que tous les α_i sont nuls. Donc, je fais le produit scalaire de ce vecteur nul avec v_i pour tout i , donc pour i entre 1 et k .

Notes

Summary



0m 54s

Proposition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ une famille orthogonale de vecteurs avec $v_i \neq 0$ pour tout i . Alors $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une famille libre.

Preuve Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$.

Pour $1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned} \langle v_i, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \rangle &= \alpha_1 \underbrace{\langle v_i, v_1 \rangle}_0 + \dots + \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_0 + \dots + \alpha_k \underbrace{\langle v_i, v_k \rangle}_0 \\ &= \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle \end{aligned}$$

Comme $v_i \neq 0$, alors $\langle v_i, v_i \rangle > 0$.

On déduit que $\alpha_i = 0$. Dnc $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une famille libre. $\square$

9.6 Comment trouver une base orthogonale/orthonormale: première étape

Je fais le produit scalaire de v_i avec ce vecteur-là. Ça, c'est d'un côté, égal au produit scalaire de v_i avec le vecteur nul, qui est forcément 0, parce que je peux sortir le scalaire de 0, et puis, ici, c'est linéaire. Donc j'ai $\alpha_1 \langle v_i, v_1 \rangle + \dots + \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + \alpha_k \langle v_i, v_k \rangle$. Maintenant, comme c'est une famille orthogonale, ici, tous ces produits scalaires sont égaux à zéro, sauf celui-ci. Donc, ceci est égal à $\alpha_i \langle v_i, v_i \rangle$, et comme on a des vecteurs non nuls, alors par notre axiome numéro 4, nous avons que $\langle v_i, v_i \rangle$ est strictement plus grand que zéro. Mais par contre, ceci est censé être égal à zéro, donc on conclut, on déduit que α_i doit être égal à 0. Donc, on a choisi des scalaires, on fait cette combinaison qui vaut 0, la seule façon que cela arrive, c'est que tous les scalaires soient égaux à 0. Donc, ça montre que la famille $v_1, \dots, v_k$ est une famille libre. Très bien, cela est une première propriété qui nous aidera à trouver une base dans un espace de dimension finie, en tout cas. Une base orthogonale, parce que j'irai chercher une famille orthogonale avec le bon nombre de vecteurs dedans. Maintenant, par contre, comment trouver les vecteurs orthogonaux dans un espace quelconque ? Donc, c'est la deuxième partie de cette vidéo.

Notes

Summary



Définition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour $u, v \in V$, on définit

$$\text{proj}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v,$$

la **projection orthogonale** de u sur v .

Propriétés ①



9.6 Comment trouver une base orthogonale/orthonormale: première étape



Je fais la définition suivante : Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Je me donne deux vecteurs u et v dans V , et on définit la projection orthogonale de u sur v et puis on la dénote comme ça : $\text{proj}_v u$. C'est un multiple scalaire du vecteur v , et puis c'est ce multiple scalaire là. Je fais le produit scalaire de u et v et je divise par la norme carrée de v . Maintenant, on a déjà vu dans $\mathbb{R}^2$ une projection orthogonale, géométriquement, et puis on a déjà développé une formule pour ça, pas du tout en utilisant un produit scalaire, donc, d'abord, je vais faire un lien avec ces deux choses-là. Donc, propriétés... Vous devriez être un peu inquiet, parce que, là, est-ce que ça donne la même chose que ce qu'on a vu dans $\mathbb{R}^2$? Donc, si V est égal à $\mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire usuel, alors, si je prends $u = (x, y)$, et $v = (a, b)$, on a déjà, normalement, je vais calculer en utilisant cette formule-là, $\text{proj}_v u$, et puis, donc, je fais le produit scalaire, donc, ça c'est $ax + by$, je divise par la norme de v au carré, donc par $a^2 + b^2$, et qui multiplie le vecteur v qui est (a, b) .

Notes

Summary



4m 33s

Définition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour $u, v \in V$, on définit

$$\text{proj}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v,$$

la **projection orthogonale** de u sur v .

Propriétés ① $V = \mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire usuel. $u = (x, y)$, $v = (a, b)$.

$$\text{proj}_v u = \frac{ax+by}{a^2+b^2} (a, b) = \frac{1}{a^2+b^2} (a^2x+aby, abx+b^2y) \quad (\text{même formule développée dans le chapitre 5.})$$

② $\text{proj}_v u \in \text{Vect}(v)$, c'est un multiple scalaire du vecteur v .



9.6 Comment trouver une base orthogonale/orthonormale: première étape

Puis, ça donne $1/(a^2 + b^2)$, fois le vecteur, et ici, j'ai $a^2x + aby$, et ensuite, deuxième coordonnée, je trouve $abx + b^2y$, et ça, c'est exactement la formule que nous avons vue, il y a longtemps. Donc, ça, c'est la même formule développée dans le chapitre 5, je crois, où l'on a introduit les applications linéaires. C'est très bien, on n'a pas deux notions différentes de la projection dans $\mathbb{R}^2$ pour autant qu'on prenne le produit scalaire usuel. Ça donne exactement la même formule ici. Donc, ça, c'est une propriété. La deuxième propriété que je veux soulever ici, c'est que, bon, je le redis, que le $\text{proj}_v(u)$, la projection orthogonale de u sur le vecteur v , c'est juste un multiple scalaire du vecteur v , donc c'est dans l'espace vectoriel engendré par v , c'est un vecteur parallèle ou un multiple scalaire du vecteur v . Et puis, troisième point, et ça, c'est ce qui est important, si on se rappelle que notre but est de trouver une façon de calculer une base orthogonale, et ça, c'est, si je prends mes deux vecteurs u et v et j'imagine que j'ai un espace engendré, par exemple, par u et v .

Notes

Summary



Définition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour $u, v \in V$, on définit

$$\text{proj}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v,$$

la **projection orthogonale** de u sur v .

Propriétés ① $V = \mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire usuel. $u = (x, y)$, $v = (a, b)$.

$$\text{proj}_v u = \frac{ax+by}{a^2+b^2} (a, b) = \frac{1}{a^2+b^2} (a^2x+aby, abx+b^2y) \quad (\text{même formule développée dans le chapitre 5.})$$

② $\text{proj}_v u \in \text{Vect}(v)$, c'est un multiple scalaire du vecteur v .

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \langle u - \text{proj}_v u, v \rangle &= \langle u, v \rangle - \langle \text{proj}_v u, v \rangle = \langle u, v \rangle - \left\langle \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, v \right\rangle \\ &= \langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle v, v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle = 0. \end{aligned}$$



9.6 Comment trouver une base orthogonale/orthonormale: première étape

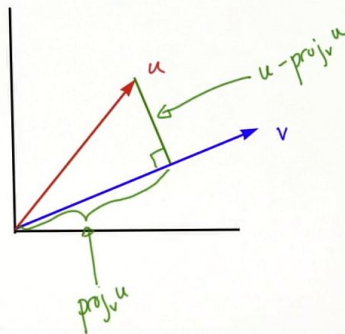
Alors, maintenant, je regarde u moins la projection orthogonale de u sur v et je fais le produit scalaire de ça avec v . Alors, ceci est égal, donc, je vais utiliser la linéarité, donc ça, c'est produit scalaire de u avec v , moins produit scalaire de la projection avec v . Et puis, ça, je continue, ça c'est u avec v , moins, et puis, maintenant, je mets la formule pour la projection, donc ça, c'est produit scalaire u avec v , sur produit scalaire v avec lui-même, qui multiplie v , donc ça, c'est le premier vecteur, produit scalaire avec v . Donc, je continue à développer, donc $\langle u, v \rangle$ moins, ça, c'est un scalaire, un nombre réel, donc je peux le sortir, et puis, ce qui reste, c'est le produit scalaire de v avec lui-même. Maintenant, on voit que ça s'annule, puis j'ai $\langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle$ qui vaut 0. Donc, du coup, si j'imagine que je commence avec l'espace, bon, je ferai la remarque parce que je n'ai pas beaucoup de place ici et en plus je ferai un dessin qui va avec.

Notes

Summary



7m 57s



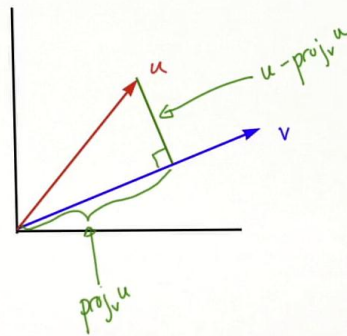
9.6 Comment trouver une base orthogonale/orthonormale: première étape

Disons que je nomme ces vecteurs, ça, c'est le vecteur v et puis le rouge, c'est le vecteur u . Maintenant, dans $\mathbb{R}^2$, comme on l'a vu, que cette projection orthogonale donne exactement la projection géométrique orthogonale, je vais dessiner. Donc, ici, si je fais la projection orthogonale de u sur v , je trace une orthogonale, là, et puis la projection orthogonale, ce sont ces vecteurs-là, donc, ça, c'est la projection orthogonale de u sur v , donc c'est dans la direction de v , et puis, c'est juste pas aussi long que v . Donc, si je fais la projection orthogonale plus ce vecteur-là, j'obtiens u , donc je sais que ce vecteur-là, c'est exactement u moins la projection orthogonale de u sur v . Donc, effectivement, comme ce qu'on a montré, ça, c'est un angle rectangle, donc ce vecteur-là, il est orthogonal à v . Maintenant, ce que j'aimerais soulever ou souligner ici, c'est la propriété suivante : Si on regarde l'espace vectoriel engendré par u et v , donc on imagine que c'était cet espace-là qui nous intéressait et qu'on cherchait une base orthogonale dans cet espace.

Notes

Summary





$$\text{Vect}(u, v) \\ = \text{Vect}(v, u - \text{proj}_v u)$$

9.6 Comment trouver une base orthogonale/orthonormale: première étape

Alors, si je garde le vecteur v et je prends le vecteur u moins la projection orthogonale de u sur v . En tout cas, là, j'ai deux vecteurs qui sont orthogonaux, et puis j'aimerais vous montrer que dans tous les cas, ça engendre le même espace. Si je fais le Vect de ça, je prétends que c'est égal à l'espace engendré par u, v . Maintenant, pourquoi? Ça, c'est un vecteur qui est juste parallèle à v . Donc, je sais que - bon, déjà, dans une direction - ça, c'est une combinaison linéaire de u et v . Donc, cet espace-là est inclus là-dedans. Maintenant, le premier, il est inclus ici, donc, maintenant, v est ici dedans, est-ce que u est ici dedans? Oui, parce que ça, c'est un multiple scalaire de v , et comme j'ai v ici, ça veut dire que je peux soustraire ce multiple scalaire et j'obtiens u . On a les deux inclusions, donc effectivement, c'est le même espace. On a commencé avec deux vecteurs qui ne sont pas orthogonaux, et puis, là, on a le début d'un programme pour trouver une base orthogonale. D'ailleurs, dans le cas de la dimension deux, on l'a fait. Donc, on remplace u, v par ces deux vecteurs-là et on a une base orthogonale. On poursuit ça dans la prochaine vidéo.

Notes

Summary

