



9.7 Procédé de Gram-Schmidt



Maintenant, comme promis, nous allons voir comment on commence dans un espace vectoriel de dimension finie donné dans lequel il y a un produit scalaire et puis on cherche une base orthogonale de cet espace. Je n'ai pas fait la remarque, dès le moment où on a une base orthogonale, il est facile de trouver une base orthonormale car il suffit de diviser chacun des vecteurs dans la base orthogonale par sa norme. Ça je ferai après, mais pour le moment on cherche une base orthogonale d'un espace vectoriel donné. Malheureusement, c'est un procédé long. Ce n'est pas compliqué, c'est juste beaucoup d'étapes calculatoires. Je donnerai déjà le procédé, qui s'appelle le procédé de Gram-Schmidt, ensuite, je vais faire une esquisse de preuve que ça marche à chaque coup, et puis ensuite, je ferai un exemple.

Notes

Summary



0m 04s

Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et soient $x_1, \dots, x_k \in V$. On définit une suite de vecteurs $v_1, \dots, v_k$ de V comme suit :

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 \\ v_2 &= x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 \\ v_3 &= x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 \\ &\vdots \\ v_k &= x_k - \text{proj}_{v_1} x_k - \text{proj}_{v_2} x_k - \dots - \text{proj}_{v_{k-1}} x_k. \end{aligned}$$

Proposition. $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une famille orthogonale de vecteurs.

9.7 Procédé de Gram-Schmidt



Alors, je me donne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire et puis je me donne des vecteurs x_1 jusqu'à x_k dans V . Ensuite, je définis une nouvelle suite de vecteurs v_1 jusqu'à v_k et la définition est comme suit. Et ça, c'est la partie qui est longue et calculatoire. Je pose v_1 simplement égal à x_1 . Et ensuite, v_2 c'est x_2 et je soustrais la projection de x_2 sur v_1 . Ensuite, pour v_3 , je prends le troisième vecteur x_3 et je soustrais les projections de vecteur déjà trouvés. Et puis ainsi de suite. Donc quand on arrive au $k^{\text{ème}}$ vecteur, je prends x_k et ensuite je soustrais toutes les projections de x_k sur les $k - 1$ vecteurs précédents que nous avons déjà calculés. Donc on ne peut pas le faire tout d'un coup, on ne peut pas calculer lui sans avoir calculé tous ceux qui viennent avant. Mais bon, c'est une procédure récursive, il faut y aller quoi. Je ferai un exemple.

Notes

Summary



1m 03s

Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et soient $x_1, \dots, x_k \in V$. On définit une suite de vecteurs $v_1, \dots, v_k$ de V comme suit :

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 \\ v_2 &= x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 \\ v_3 &= x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 \\ &\vdots \\ v_k &= x_k - \text{proj}_{v_1} x_k - \text{proj}_{v_2} x_k - \dots - \text{proj}_{v_{k-1}} x_k. \end{aligned}$$

Proposition. $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une famille orthogonale de vecteurs.

9.7 Procédé de Gram-Schmidt



Et puis la proposition, c'est qu'en faisant comme ça, on a une famille orthogonale de vecteurs. C'est en fait très beau mais ça va seulement être long à calculer. On a déjà vu dans la vidéo précédente que si je me donne deux vecteurs x_1 et x_2 et puis je garde le premier vecteur, donc je garde x_1 , et ensuite, je remplace x_2 par x_2 moins la projection sur le premier, donc ça c'est le deuxième vecteur, alors ces deux vecteurs sont orthogonaux et puis en plus, engendrent le même espace que ce qu'on avait avant. Donc ça, ça fait partie de l'énoncé mais pour le moment, je veux juste vous convaincre de l'orthogonalité. Le début, on a déjà vu. Maintenant, je fais une esquisse de preuve de cette proposition.

Notes

Summary



2m 10s

Esquisse de preuve: On montre d'abord que $\langle v_i, v_i \rangle = 0$ pour $2 \leq i \leq k$.

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad (\text{vidéo précédente})$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 \rangle$$

v_1 est orthogonal à $x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3$.

9.7 Procédé de Gram-Schmidt

D'abord, je vais vous montrer que v_1 est orthogonal à tous les autres vecteurs. Dans la vidéo précédente, on a déjà montré que si je fais $\langle v_1, v_2 \rangle$ ça ça donne zéro. Donc vidéo précédente. C'est pour ça que j'avais dit que c'était le début de l'algorithme. Maintenant, si je fais $\langle v_1, v_3 \rangle$, donc ça, c'est $\langle v_1, \dots$ Et puis, donc je rappelle ici la définition de v_3 , c'est que je prends le troisième vecteur x_3 et je soustrais sa projection sur v_1 , donc le v_1 qu'on a déjà trouvé, et ensuite, je soustrais sa projection sur le v_2 , qu'on a déjà trouvé. Maintenant, le v_1 est orthogonal à x_3 moins la projection sur v_1 de x_3 . Donc $v_1 \dots$ Ça c'est la propriété que j'ai montrée dans la vidéo précédente pour deux vecteurs u et v . Donc ça c'est une chose. Donc quand je fais le produit scalaire de ça avec ça, j'aurai zéro. Et l'autre chose, c'est que la projection de x_3 sur v_2 est dans la direction de v_2 donc c'est un multiple scalaire de v_2 .

Notes

Summary



3m 00s

Esquisse de preuve: On montre d'abord que $\langle v_i, v_i \rangle = 0$ pour $2 \leq i \leq k$.

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad (\text{vidéo précédente})$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 \rangle$$

v_1 est orthogonal à $x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3$.

De plus, $\text{proj}_{v_2} x_3$ est un multiple scalaire de v_2 et donc aussi orthogonal à v_1 .
 $= 0$.

$$\langle v_1, v_4 \rangle = \langle v_1, x_4 - \text{proj}_{v_1} x_4 - \text{proj}_{v_2} x_4 - \text{proj}_{v_3} x_4 \rangle$$



9.7 Procédé de Gram-Schmidt



De plus, la projection sur v_2 de x_3 est un multiple scalaire de v_2 , et donc aussi orthogonal à v_1 , car on sait déjà que v_1 est orthogonal à v_2 . Donc du coup, si je sépare ici, j'aurai v_1 avec ça, ça ça donne zéro. Et v_1 avec ça, ça donne zéro. Comme c'est additif à droite, le tout est égal à zéro. Très bien. Et puis, je vais juste faire encore une étape. Une étape et puis après je dis ainsi de suite. C'est pour ça que je dis que c'est une esquisse. Donc ici, j'ai v_1 . Ensuite, le v_4 c'est x_4 moins sa projection sur v_1 moins sa projection sur v_2 moins sa projection sur v_3 . Et puis comme avant, le v_1 est orthogonal à x_4 moins la projection sur v_1 , ça c'est ce qu'on a vu dans la vidéo précédente. Donc ce premier produit scalaire, ça donne zéro. Et ensuite, la projection de x_4 sur v_2 c'est un vecteur qui est un multiple scalaire de v_2 , et on sait que v_1 est orthogonal à v_2 donc ce produit scalaire-là, ça donne zéro.

Notes

Summary



4m 26s

Esquisse de preuve: On montre d'abord que $\langle v_i, v_i \rangle = 0$ pour $2 \leq i \leq k$.

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad (\text{vidéo précédente})$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 \rangle$$

v_1 est orthogonal à $x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3$.

De plus, $\text{proj}_{v_2} x_3$ est un multiple scalaire de v_2 et donc aussi orthogonal à v_1 .
 $= 0$.

$$\langle v_1, v_4 \rangle = \langle v_1, x_4 - \text{proj}_{v_1} x_4 - \text{proj}_{v_2} x_4 - \text{proj}_{v_3} x_4 \rangle \quad \text{On a} \quad \langle v_1, x_4 - \text{proj}_{v_1} x_4 \rangle = 0 \quad (\text{vidéo §9.6})$$

$$= 0.$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1, \text{proj}_{v_2} x_4 \rangle = 0$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1, \text{proj}_{v_3} x_4 \rangle = 0$$

etc.

9.7 Procédé de Gram-Schmidt



Et puis enfin, la projection de x_4 sur v_3 c'est un vecteur qui est un multiple scalaire de v_3 . Et puis on sait déjà que $\langle v_1, v_3 \rangle$, le produit scalaire est nul. Donc v_1 avec ce vecteur-là, c'est aussi zéro. Donc j'écris un peu ça. Donc on a que v_1, x_4 moins la projection sur v_1 de x_4 est égal à zéro. Ça c'est la vidéo précédente, paragraphe 9.6. On a que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ et donc ça ça implique que v_1 , la projection de x_4 sur v_2 est égal à zéro. Et on a que $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$ et ça ça implique que v_1 avec la projection de x_4 sur v_3 est égal à zéro. Donc du coup, je trouve zéro. Et puis, ainsi de suite, etc. Donc là, je me suis occupée du vecteur v_1 . Et maintenant, qu'en est-il de v_2 et des autres ? C'est quand même une esquisse, je ne vais pas faire tout.

Notes

Summary



5m 50s

On montre que v_2 est orthogonal à v_i $3 \leq i \leq k$.

$$\langle v_2, v_3 \rangle = \langle v_2, x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 \rangle$$



9.7 Procédé de Gram-Schmidt



Pour le vecteur v_2 , on montre que v_2 est orthogonal à v_i pour i , je n'ai pas besoin de faire 1 parce qu'on a déjà fait, donc disons pour 3 jusqu'à k . De nouveau, je ne vais pas tout faire, mais c'est pour vous donner l'idée. Je n'ai pas besoin de faire v_2 avec v_1 parce que c'est déjà fait. Donc si je fais v_2 avec v_3 , alors ça c'est v_2 et v_3 c'était x_3 moins la projection sur v_2 de x_3 moins la projection sur v_1 de x_3 . Je les écris dans un autre sens cette fois. Et puis, alors maintenant, comme avec deux vecteurs, si je prends v_2 et un autre x_3 moins la projection sur v_2 , ce produit scalaire-là est égal à zéro. Et puis, ce vecteur est un vecteur qui est un multiple scalaire de v_1 et on sait déjà que v_2 est orthogonal à v_1 donc ceci donne zéro.

Notes

Summary



7m 15s

On montre que v_2 est orthogonal à v_i $3 \leq i \leq k$.

$$\langle v_2, v_3 \rangle = \langle v_2, x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 \rangle = 0 \quad \text{car} \quad \langle v_2, x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 \rangle = 0 \quad \text{et} \\ \langle v_2, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_2, \text{proj}_{v_1} x_3 \rangle = 0.$$

$$\langle v_2, v_4 \rangle = \langle v_2, x_4 - \text{proj}_{v_2} x_4 - \text{proj}_{v_1} x_4 - \text{proj}_{v_3} x_4 \rangle$$

$\uparrow$
 mult scalaire
 de v_1



9.7 Procédé de Gram-Schmidt

J'écris car v_2 avec x_3 moins la projection sur v_2 de x_3 , ça, ça donne zéro. Et $\langle v_2, v_1 \rangle = 0$ implique que v_2 avec la projection sur v_1 de x_3 est égal à zéro. Et puis maintenant, si je fais v_2 avec v_4 . Donc ça, c'est v_2 avec x_4 moins... Maintenant, je vais les écrire dans un autre sens. J'ai moins la projection sur v_2 de x_4 moins la projection sur v_1 de x_4 moins la projection sur v_3 de x_4 . Donc je les ai permutés un petit peu. Et puis comme avant, je sais que si je fais v_2 et x_4 moins la projection sur v_2 , ça c'est un produit scalaire qui donne zéro. Ça c'est un multiple de v_1 . Et donc v_2 avec ce vecteur, c'est zéro. Et puis ça, c'est un multiple scalaire de v_3 , et on sait déjà que v_2 avec v_3 , c'est zéro, et donc ça c'est zéro.

Notes

Summary



On montre que v_2 est orthogonal à v_i $3 \leq i \leq k$.

$$\langle v_2, v_3 \rangle = \langle v_2, x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 \rangle = 0 \quad \text{car} \quad \langle v_2, x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 \rangle = 0 \quad \text{et} \\ \langle v_2, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_2, \text{proj}_{v_1} x_3 \rangle = 0.$$

$$\langle v_2, v_4 \rangle = \langle v_2, x_4 - \text{proj}_{v_2} x_4 - \text{proj}_{v_1} x_4 - \text{proj}_{v_3} x_4 \rangle = 0.$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 mult scalaire $\uparrow$ multiple scalaire de v_3
 de v_1

etc.

9.7 Procédé de Gram-Schmidt

Et je dis etc. Donc c'est vraiment une esquisse, je n'ai pas fait tout. Il faudrait une récurrence et puis je trouve que ça n'aide pas de faire une démonstration formelle ici, j'espère que vous en êtes convaincus. Et puis maintenant, je vais faire un exemple.

Notes

Summary



Exemple. Prenons $V = \mathbb{R}^4$ avec le produit scalaire usuel.

Considérons $x_1 = (1, 1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 1, 0)$ et $x_3 = (0, 0, 1, 1)$.

Appliquons le procédé de Gram-Schmidt.

$$v_1 = x_1 = (1, 1, 0, 0).$$

$$v_2 = x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 = (0, 1, 1, 0) - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = (0, 1, 1, 0) -$$



9.7 Procédé de Gram-Schmidt

Je prends V l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel et je me donne trois vecteurs x_1, x_2, x_3 , comme vous voyez. Et puis, je vais appliquer le procédé de Gram-Schmidt à ces vecteurs-là. Donc appliquons. Alors v_1 c'est facile, c'est juste x_1 . Donc ça je ne change pas. Ensuite, v_2 c'est x_2 moins la projection de x_2 sur v_1 . Donc ça c'est x_2 moins... Maintenant, cette projection, je vous rappelle ici, c'est le produit scalaire usuel, donc je vais tout écrire au début. Donc ça c'est $\langle x_2, v_1 \rangle / \langle v_1, v_1 \rangle$ qui multiplie v_1 . Donc ça de toute façon, c'est un vecteur qui est un multiple scalaire de v_1 et ça c'est le multiple. Donc ça c'est égal à $(0, 1, 1, 0)$ moins... Maintenant, je fais le produit scalaire de x_2 avec v_1 , ça c'est x_1 avec v_1 .

Notes

Summary



10m 01s

Exemple. Prenons $V = \mathbb{R}^4$ avec le produit scalaire usuel.

Considérons $x_1 = (1, 1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 1, 0)$ et $x_3 = (0, 0, 1, 1)$.

Appliquons le procédé de Gram-Schmidt.

$$v_1 = x_1 = (1, 1, 0, 0).$$

$$v_2 = x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 = (0, 1, 1, 0) - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = (0, 1, 1, 0) - \frac{1}{2} (1, 1, 0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$v_3 = x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 = (0, 0, 1, 1) -$$



9.7 Procédé de Gram-Schmidt

Donc ça, ça me donne $0 + 1 + 0$ donc ça c'est 1, divisé par le produit scalaire de v_1 avec lui-même, c'est 2, qui multiplie v_1 . Donc ça, ça donne $-1/2$, $1 - 1/2 = 1/2$, 1 , 0 . Bon maintenant, vous pouvez déjà vous arrêter ici pour vérifier que nous avons fait cette étape correctement. Je devrais avoir ici un vecteur qui est orthogonal, d'une part au moins, orthogonal à ce vecteur-là. Donc j'ai $-1/2 + 1/2 + 0$, donc au moins ça. Il peut y avoir d'autres erreurs, mais ça c'est une petite vérification qu'on peut faire. Et ensuite, v_3 est égal à, par le procédé, x_3 moins la projection sur v_1 de x_3 moins la projection sur v_2 de x_3 . Donc j'ai x_3 qui est ce vecteur moins... Et maintenant, j'écris tout, comme c'est un premier exemple. Donc après, j'ai $\langle x_3, v_1 \rangle / \langle v_1, v_1 \rangle$, c'est ça qui multiplie v_1 , moins $\langle x_3, v_2 \rangle / \langle v_2, v_2 \rangle$, qui multiplie v_2 .

Notes

Summary



11m 15s

Exemple. Prenons $V = \mathbb{R}^4$ avec le produit scalaire usuel.

Considérons $x_1 = (1, 1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 1, 0)$ et $x_3 = (0, 0, 1, 1)$.

Appliquons le procédé de Gram-Schmidt.

$$v_1 = x_1 = (1, 1, 0, 0).$$

$$v_2 = x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 = (0, 1, 1, 0) - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = (0, 1, 1, 0) - \frac{1}{2} (1, 1, 0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$\begin{aligned} v_3 &= x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 = (0, 0, 1, 1) - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\ &= (0, 0, 1, 1) - 0 - \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \end{aligned}$$

9.7 Procédé de Gram-Schmidt



Et maintenant, j'effectue tous ces produits scalaires moins... x_3 avec v_1 ça donne $0 + 0$, ça c'est 0 . Bon après, le reste n'est pas important. Moins... Ensuite, x_3 avec v_2 . Maintenant, le v_2 c'est ici. Donc j'ai $0 + 0 + 1$, donc -1 divisé par... Et puis maintenant, je dois diviser par le produit scalaire de v_2 avec lui-même. Donc j'ai $1/4 + 1/4 + 1$. Et tout ça, ça multiplie v_2 . Donc j'ai $(-1/2, 1/2, 1, 0)$. Maintenant, je vais simplifier. Vous voyez pourquoi ça devient pénible. Donc ici j'ai égal à $(0, 0, 1, 1)$ moins... Donc ici en bas, j'ai $3/2$, donc ça me fait $2/3$, qui multiplie $(-1/2, 1/2, 1, 0)$. Et quand je mets tout ça ensemble, ici j'ai $1/3, -1/3$, après j'ai $1 - 2/3$ donc $1/3, 1$. Et puis de nouveau, je peux vérifier que ce vecteur est effectivement orthogonal aux deux précédents. Donc là, j'ai $1/3 - 1/3 + 0$, donc ça c'est zéro. Et ensuite ici, j'ai $-1/6 - 1/6$, ça fait $-1/3$, $+ 1/3 + 0$, donc ça c'est zéro.

Notes

Summary



12m 43s

Exemple. Prenons $V = \mathbb{R}^4$ avec le produit scalaire usuel.

Considérons $x_1 = (1, 1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 1, 0)$ et $x_3 = (0, 0, 1, 1)$.

Appliquons le procédé de Gram-Schmidt.

$$v_1 = x_1 = (1, 1, 0, 0).$$

$$v_2 = x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 = (0, 1, 1, 0) - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = (0, 1, 1, 0) - \frac{1}{2} (1, 1, 0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$\begin{aligned} v_3 &= x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 = (0, 0, 1, 1) - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\ &= (0, 0, 1, 1) - 0 - \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \end{aligned}$$

On vérifie que $v_1 \cdot v_2 = 0$
 $v_1 \cdot v_3 = 0$
 $v_2 \cdot v_3 = 0$.

$$\text{Vect}(x_1, x_2, x_3) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3).$$

9.7 Procédé de Gram-Schmidt



Donc on vérifie que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$ et $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$. Magnifique. Donc voilà, on a commencé avec trois vecteurs un peu quelconques. Et puis après, on fait le procédé de Gram-Schmidt et puis on fabrique trois vecteurs qui sont orthogonaux deux à deux. Maintenant, ce que je n'ai pas encore remarqué mais que je vais remarquer ici dans cet exemple et puis je vais le reprendre dans la prochaine vidéo, c'est que, ici, si on regarde le Vect , donc le sous-espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs-là, ou bien le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3 , des nouveaux vecteurs, alors c'est le même sous-espace. Alors ici, j'aimerais juste vous convaincre. Donc comme d'habitude, - peut-être j'écris - donc, $\text{Vect}(x_1, x_2, x_3)$ est égal au $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Et puis maintenant, pour voir ça, je vais vous convaincre des deux inclusions. Donc d'abord, il y a une des inclusions qui est tout à fait banale, donc ça c'est l'inclusion comme ça, parce que pour ça je dois juste vous dire que le v_1 est clairement égal à x_1 donc il est là-dedans.

Notes

Summary



14m 18s

Exemple. Prenons $V = \mathbb{R}^4$ avec le produit scalaire usuel.

Considérons $x_1 = (1, 1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 1, 0)$ et $x_3 = (0, 0, 1, 1)$.

Appliquons le procédé de Gram-Schmidt.

$$v_1 = x_1 = (1, 1, 0, 0).$$

$$v_2 = x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 = (0, 1, 1, 0) - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = (0, 1, 1, 0) - \frac{1}{2} (1, 1, 0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$v_3 = x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 = (0, 0, 1, 1) - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = (0, 0, 1, 1) - 0 - \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$= (0, 0, 1, 1) - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

On vérifie que $v_1 \cdot v_2 = 0$
 $v_1 \cdot v_3 = 0$
 $v_2 \cdot v_3 = 0$.

$$\text{Vect}(x_1, x_2, x_3) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3).$$

$$x_2 = v_2 + \text{proj}_{v_1} x_2$$

9.7 Procédé de Gram-Schmidt



Notes

Le v_2 maintenant, c'est une combinaison linéaire de x_2 , qui est ici, et la projection de x_2 sur v_1 , mais v_1 c'est juste x_1 . Donc ça c'est une combinaison linéaire de x_1 et x_2 . v_3 est une combinaison linéaire de x_3 et les projections sur v_1 et v_2 mais je me suis déjà convaincue que v_1 et v_2 sont là-dedans, donc ce sont les multiples de v_1 et v_2 , donc v_3 est aussi là ici dedans. Donc ça c'est celui qui est facile à voir. Maintenant, est-ce qu'on peut aussi voir que x_1, x_2, x_3 sont inclus ici ? Le x_1 , c'est clair parce que c'est égal à v_1 . Le x_2 , vous n'avez qu'à voir que x_2 est égal à v_2 plus cette projection. Et donc le X_2 , on l'écrit comme une combinaison linéaire de v_2 et un multiple de v_1 . Bon ça c'est bien.

Summary



15m 52s

Exemple. Prenons $V = \mathbb{R}^4$ avec le produit scalaire usuel.

Considérons $x_1 = (1, 1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 1, 0)$ et $x_3 = (0, 0, 1, 1)$.

Appliquons le procédé de Gram-Schmidt.

$$v_1 = x_1 = (1, 1, 0, 0).$$

$$v_2 = x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 = (0, 1, 1, 0) - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = (0, 1, 1, 0) - \frac{1}{2} (1, 1, 0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$\begin{aligned} v_3 &= x_3 - \text{proj}_{v_1} x_3 - \text{proj}_{v_2} x_3 = (0, 0, 1, 1) - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\ &= (0, 0, 1, 1) - 0 - \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \end{aligned}$$

On vérifie que $v_1 \cdot v_2 = 0$
 $v_1 \cdot v_3 = 0$
 $v_2 \cdot v_3 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Vect}(x_1, x_2, x_3) &= \text{Vect}(v_1, v_2, v_3). \\ &\supseteq \checkmark \\ &\subseteq \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= v_2 + \text{proj}_{v_1} x_2 \in \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) \\ x_3 &= v_3 + \text{proj}_{v_1} x_3 + \text{proj}_{v_2} x_3 \in \text{Vect}(v_1, v_2, v_3). \end{aligned}$$



9.7 Procédé de Gram-Schmidt

Donc ça c'est dans le $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Et le x_3 est égal à v_3 plus la projection sur v_1 plus la projection sur v_2 . Donc ça c'est v_3 . Ça c'est un multiple de v_1 . Ça c'est un multiple de v_2 . Donc ça c'est aussi dans le Vect . En fait, les deux inclusions sont faciles. Donc on a l'autre inclusion aussi, donc les deux espaces sont égaux. Et c'est ça qui nous donnera cette méthode pour chercher une base orthogonale.

Notes

Summary



16m 51s