



9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)

Maintenant ayant mis en place les lemmes et les propositions à propos de l'orthogonalité, de comment construire une suite de vecteurs orthogonaux deux à deux, je peux énoncer le théorème, qui affirme que ce procédé de Gram-Schmidt donnera lieu à une base d'un espace donné. Ici, je vais juste vous faire quelques remarques, je ne vais pas faire plus de démonstrations, de preuves, car je crois qu'avec les exemples, vous allez être convaincus, et puis, jusqu'à maintenant j'ai fait pas mal de preuves.

Notes

Summary



0m 04s

Théorème. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et soit $\{x_1, \dots, x_k\}$ une famille de vecteurs linéairement indépendants. Le procédé de Gram-Schmidt définit une suite de vecteurs $v_1, \dots, v_k$, $v_i = x_i - \text{proj}_{v_1} x_i - \dots - \text{proj}_{v_{i-1}} x_i$ telle que $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux, non nuls et donc linéairement indépendants. De plus $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$.



9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)

Alors, le théorème dit que je me donne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et puis, une suite de vecteurs linéairement indépendants, en particulier, il n'y a pas le vecteur nul dedans. Et puis, je définis par le procédé de Gram-Schmidt une suite de vecteurs $v_1, \dots, v_k$, et puis la définition, ça n'a pas changé. Et puis, cette suite de vecteurs aura des propriétés très importantes, et puis, bon d'abord, ce sont les vecteurs orthogonaux deux à deux, ça, nous avons montré. Ils sont tous non nuls, et donc des vecteurs orthogonaux deux à deux, et donc linéairement indépendants. Et comme j'aurais k vecteurs linéairement indépendants dans un espace de dimension k , ces vecteurs-là doivent forcément faire une base de cet espace, et donc les espaces vectoriels engendrés des deux côtés sont égaux. Donc voilà, on commence avec une famille de vecteurs, qui est une base d'un espace, car ils sont linéairement indépendants, donc c'est une base du sous-espace qu'ils engendrent. Et puis, j'utilise Gram-Schmidt, ça donnera lieu de nouveau à k vecteurs, le même nombre. Ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux, ça nous l'avons montré.

Notes

Summary



0m 37s

Théorème. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et soit $\{x_1, \dots, x_k\}$ une famille de vecteurs linéairement indépendants. Le procédé de Gram-Schmidt définit une suite de vecteurs $v_1, \dots, v_k$, $v_i = x_i - \text{proj}_{v_1} x_i - \dots - \text{proj}_{v_{i-1}} x_i$ telle que $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux, non nuls et donc linéairement indépendants. De plus $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$. ①

Remarques ① déjà montré

② non nuls, pas encore montré. Voir la fin 9.7, partie 1.

③ si non nuls, proposition $\Rightarrow$ linéairement indépendants.

④ $\dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = k$

9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)



Et puis, ils sont non nuls et par un lemme que nous avons montré, s'ils sont non nuls alors ils sont linéairement indépendants, et je répète, c'est le bon nombre de vecteurs linéairement indépendants dans un espace de cette dimension-là, donc c'est une base, donc ça engendre l'espace. Donc tous ce que nous n'avons pas montré, c'est le fait que ces vecteurs sont non nuls, mais si vous réfléchissez à ce que je disais juste à la fin de la dernière vidéo, ça devient assez évident qu'ils sont non nuls. Donc, juste quelques remarques. Donc la première remarque, c'est que... il y a des parties de ça que nous avons déjà montrées, donc qui est une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux, donc ça : déjà montré. Et puis, le non nul : pas encore montré. Mais, voir la fin de la vidéo 9.7 partie 1. Et puis, maintenant s'ils sont non nuls, donc, si non nuls, on avait une proposition, j'aurais pu l'appeler un lemme, une proposition qui implique linéairement indépendants. Et puis, enfin, comme il y a k vecteurs, la dimension de l'espace engendrés par $x_1, \dots, x_k$ est égale à k . Alors, c'est générateur et linéairement indépendant et donc, par 3, par l'indépendance linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_k$.

Notes

Summary



1m 52s

Théorème. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et soit $\{x_1, \dots, x_k\}$ une famille de vecteurs linéairement indépendants. Le procédé de Gram-Schmidt définit une suite de vecteurs $v_1, \dots, v_k$, $v_i = x_i - \text{proj}_{v_1} x_i - \dots - \text{proj}_{v_{i-1}} x_i$ telle que $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux, non nuls et donc linéairement indépendants. De plus $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$. ①

- Remarques
- ① déjà montré
 - ② non nuls, pas encore montré. Voir la fin 89.7, partie 1.
 - ③ si non nuls, proposition $\Rightarrow$ linéairement indépendants.
 - ④ $\dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = k$. Par l'indépendance linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_k$, $\{v_1, \dots, v_k\}$ est aussi une base de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$.
 - ⑤ Pour trouver une base orthonormale de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$, il suffit de "normaliser" la base orthogonale $(v_1, \dots, v_k)$, c'est-à-dire on prend $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_k}{\|v_k\|} \right)$.

9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)



Cet ensemble-là est aussi une base de cet espace, et donc on a cette égalité-là. Maintenant, encore une remarque. Remarque 5. C'est que si on souhaite avoir une base orthonormale de cet espace, il suffit de "normaliser" la base orthogonale $v_1, \dots, v_k$, c'est-à-dire on prend v_1 divisé par sa norme, v_2 divisé par sa norme etc. Et puis ça, ça donne une base orthonormale de l'espace. Faisons un grand exemple de ça.

Notes

Summary



Exemple. soient $V = \mathbb{R}^5$, $W = \{(a, b, c, d, e) \in V : a + b + c = 0 = c + d + e\}$. On munit V du produit scalaire usuel. Trouver une base orthonormale de W et exprimer le vecteur $(1, 1, -2, 0, 2)$ en termes de cette base.

D'abord, il faut une base de W .



9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)

Et donc, ça c'est vraiment ce qu'il faut pouvoir faire, on aura beaucoup d'exemples comme ça dans les exercices etc. Donc je me donne un espace vectoriel W , qui est un sous-espace de $\mathbb{R}^5$, et puis je vais munir W et V du produit scalaire usuel. Donc les calculs ne seront pas trop compliqués. Voilà. Et puis, je cherche d'abord à trouver une base orthonormale, donc *orthonormale* de W . Et puis ensuite, je vais me donner un vecteur, et puis, j'aimerais, dans W , j'aimerais exprimer ce vecteur-là en termes de cette base. On sait que dès le moment où on a une base orthonormale, c'est un calcul assez facile, mais j'aimerais le rappeler. Bon d'abord, ça vaut la peine de vérifier que ce vecteur appartient vraiment à W . Il faut que j'additionne les trois premières coordonnées, ça donne zéro. Ça c'est juste. Ensuite, les trois dernières coordonnées, et ça, ça donne zéro : c'est correct. Je commence. Alors, d'abord je vais trouver une base de W , donc d'abord il faut une base de W . Et pour ça, je vais penser que W c'est l'ensemble des solutions d'un système homogène et ces équations sont $a+b+c=0$ et $c+d+e=0$.

Notes

Summary



4m 53s

Exemple. soient $V = \mathbb{R}^5$, $W = \{(a, b, c, d, e) \in V : a + b + c = 0 = c + d + e\}$. On munit V du produit scalaire usuel. Trouver une base orthonormale de W et exprimer le vecteur $(1, 1, -2, 0, 2)$ en termes de cette base.

D'abord, il faut une base de W . $a+b+c=0$; $c+d+e=0$; la matrice^{des coefficients} de ce système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$c = -d - e$
 $a = -b + d + e$

$W = \{(-b+d+e, b, -d-e, d, e) \mid b, d, e \in \mathbb{R}\}$
 $\dim W = 3$ (nombre de variables libres)
 base de W ((

b libre
 d libre
 e libre

9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)



Si j'écris la matrice du système, donc pas la matrice augmentée, mais la matrice... Comme c'est homogène, j'écrirai juste la matrice de coefficients. Alors, j'ai [voir écran]. Voilà. Et puis, cette matrice, elle est déjà échelonnée. Et puis, les paramètres, là, j'ai un pivot, là je n'en ai pas. Donc b est une variable libre. Là j'ai un pivot, mais là non et non. Donc... d est libre, et e est libre. Donc après, j'exprime les autres en termes de ces variables libres. Donc j'ai que c est égal à $-d - e$. Et puis, j'ai a égal à $-b - c$, donc $+d + e$. Donc le W est égal à l'ensemble des vecteurs de la forme $-b+d+e, b, -d-e, d, e$ qui sont libres. Donc le b , le d et le e peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. Donc du coup, on sait que la dimension de W , c'est le nombre de variables libres. Donc c'est égal à 3, donc je vous rappelle le nombre de variables libres, et puis une base de W . Je pose une des variables libres égal à 1 et les autres égales à 0, trois fois de suite. Donc d'abord, je pose $b=1$, et $d=e=0$.

Notes

Summary



Exemple. soient $V = \mathbb{R}^5$, $W = \{(a, b, c, d, e) \in V : a + b + c = 0 = c + d + e\}$. On munit V du produit scalaire usuel. Trouver une base orthonormale de W et exprimer le vecteur $(1, 1, -2, 0, 2)$ en termes de cette base.

D'abord, il faut une base de W . $a+b+c=0$; $c+d+e=0$; la matrice ^{des coefficients} de ce système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$c = -d - e$
 $a = -b + d + e$

$W = \{(-b+d+e, b, -d-e, d, e) \mid b, d, e \in \mathbb{R}\}$
 $\dim W = 3$ (nombre de variables libres)
 base de W $((-1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, -1, 1, 0), (1, 0, -1, 0, 1))$
 x_1 x_2 x_3

Procédé de Gram-Schmidt : $v_1 = x_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$
 $v_2 = x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 = (1, 0, -1, 1, 0) - \frac{v_1 \cdot x_2}{v_1 \cdot v_1} (-1, 1, 0, 0, 0)$
 $= (1, 0, -1, 1, 0) -$

9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)



Donc j'ai $(-1, 1, 0, 0, 0)$. Ensuite, $d=1$, et les autres égaux à 0. Donc $(1, 0, -1, 1, 0)$ Et ensuite, $e=1$ et les autres égaux à 0. Donc $(1, 0, -1, 0, 1)$. Donc ça, c'est une base de W . Maintenant, pour garder la même notation que dans le procédé, je vais appeler ça x_1, x_2, x_3 , et je commence le procédé de Gram-Schmidt. Donc d'abord, ça commence facilement. On a $v_1 = x_1$, donc c'est tout simplement le premier vecteur de la base originale. Ensuite, v_2 est égal à x_2 moins la projection sur v_1 de x_2 . Alors, c'est égal à $(1, 0, -1, 1, 0)$ moins... Ici je rappelle toujours la formule au cas où vous n'avez pas encore mémorisé la projection, c'est v_1 , produit scalaire x_2 , divisé par v_1 produit scalaire avec v_1 , qui multiplie v_1 . Donc ceci est égal... Donc maintenant, je fais le produit scalaire de v_1 avec x_2 , donc là, j'ai $-1+0$. Donc j'ai -1 .

Notes

Summary



Exemple. soient $V = \mathbb{R}^5$, $W = \{(a, b, c, d, e) \in V : a + b + c = 0 = c + d + e\}$. On munit V du produit scalaire usuel. Trouver une base orthonormale de W et exprimer le vecteur $(1, 1, -2, 0, 2)$ en termes de cette base.

D'abord, il faut une base de W . $a+b+c=0$; $c+d+e=0$; la matrice ^{des coefficients} de ce système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$c = -d - e$
 $a = -b + d + e$

$W = \{(-b+d+e, b, -d-e, d, e) \mid b, d, e \in \mathbb{R}\}$
 $\dim W = 3$ (nombre de variables libres)
 base de W $((-1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, -1, 1, 0), (1, 0, -1, 0, 1))$
 x_1 x_2 x_3

Procédé de Gram-Schmidt : $v_1 = x_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$
 $v_2 = x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 = (1, 0, -1, 1, 0) - \frac{v_1 \cdot x_2}{v_1 \cdot v_1} (-1, 1, 0, 0, 0)$
 $= (1, 0, -1, 1, 0) - \frac{(-1)}{2} (-1, 1, 0, 0, 0) = (1/2, 1/2, -1, 1, 0)$

9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)



Ensuite, le produit scalaire de v_1 avec lui-même, c'est 2, qui multiplie ça. Et puis donc, ça donne : égal à... Donc ici, j'ai $1-1/2$, donc $1/2$, $0+1/2$ Ensuite, $-1, 1, 0$. Donc ça, c'est v_2 . Et je vais déjà contrôler que v_2 soit orthogonal à v_1 , sinon j'ai fait une erreur. Donc là, j'ai moins $-1/2+1/2+0$, comme que je dis : ça ne suffit pas pour dire que v_2 est correct, mais c'est une petite vérification qu'on peut faire. Ensuite, si vous voulez vraiment vérifier que c'est correct, il faudrait vérifier que l'espace engendré par v_1 et v_2 , c'est le même que l'espace engendré par x_1 et x_2 . Ici, j'ai déjà fait la vérification, donc je sais que c'est correct, mais ça c'est ce que vous pourriez faire. Maintenant je reprends cette information sur le prochain slide.

Notes

Summary



Rappel. On a $(x_1, x_2, x_3) = ((-1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, -1, 1, 0), (1, 0, -1, 0, 1))$ comme base de W , et $v_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (1/2, 1/2, -1, 1, 0)$.

$$v_3 = x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = (1, 0, -1, 0, 1) - \frac{(-1)}{2}$$



9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)



Donc on a... Voilà, ça, c'est la base x_1, x_2, x_3 . Et puis, on a déjà calculé v_1 et v_2 , et maintenant, il faut que je calcule v_3 . Donc, $v_3 = x_3$ moins... Ici, je saute juste une étape. Donc c'est la projection de x_3 sur v_1 . Donc, x_3 produit scalaire avec v_1 sur v_1 produit scalaire avec lui-même, qui multiplie v_1 , moins la projection de x_3 sur v_2 . Donc x_3 produit scalaire avec v_2 , sur v_2 produit scalaire avec v_2 qui multiplie v_2 . Maintenant, je fais tous ces produits scalaires, donc j'ai $x_3 : (1, 0, -1, 0, 1)$ moins... Et puis, maintenant le produit scalaire de x_3 avec v_1 , j'ai $-1 + 0$. Donc, -1 divisé par le produit scalaire de v_1 avec lui-même, c'est 2. Et ça multiplie v_1 moins...

Notes

Summary



11m 15s

Rappel. On a $(x_1, x_2, x_3) = ((-1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, -1, 1, 0), (1, 0, -1, 0, 1))$ comme base de W , et $v_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (1/2, 1/2, -1, 1, 0)$.

$$\begin{aligned} v_3 &= x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = (1, 0, -1, 0, 1) - \frac{(-1)}{2} (-1, 1, 0, 0, 0) - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2} (1/2, 1/2, -1, 1, 0) \\ &= (1, 0, -1, 0, 1) + 1/2 (-1, 1, 0, 0, 0) - \frac{3}{5} (1/2, 1/2, -1, 1, 0) \\ &= (1/5, 1/5, -2/5, -3/5, 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= (-1, 1, 0, 0, 0) \\ v_2 &= (1/2, 1/2, -1, 1, 0) \\ v_3 &= (1/5, 1/5, -2/5, -3/5, 1) \end{aligned}$$

9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)



Et puis, maintenant je fais le produit scalaire de x_3 avec v_2 . Donc là, j'ai $1/2 + 0 + 1$ donc ça, c'est $3/2$. $+0 + 0$. Donc ça, c'est $3/2$. Divisé par le produit scalaire de v_2 avec lui-même. Donc ça, c'est $1/4 + 1/4 + 1 + 1$, qui multiplie v_2 . Bon, maintenant, je fais encore une étape, après je vous dis la réponse. Donc j'ai $(1, 0, -1, 0, 1) + 1/2$, qui multiplie ça. Et ensuite ici, quel est le scalaire que j'ai ? Donc là, j'ai $3/2$, qui multiplie... donc ça, c'est $5/2$, donc $2/5$. Et puis, donc tout ça, ça va me faire $3/5$, qui multiplie $(1/2, 1/2, -1, 1, 0)$. Et puis, bon maintenant je vous dis que la réponse, c'est $(1/5, 1/5, -2/5, -3/5, 1)$ Donc on a trouvé que v_1 est égal à $(-1, 1, 0, 0, 0)$. v_2 est égal à $(1/2, 1/2, -1, 1, 0)$ Et v_3 est égal à $(1/5, 1/5, -2/5, -3/5, 1)$. Puis, je vais vérifier que le v_3 , que nous avons trouvé, c'est orthogonal à v_1 et v_2 . $-1/5 + 1/5$ c'est 0.

Notes

Summary



12m 27s

Rappel. On a $(x_1, x_2, x_3) = ((-1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, -1, 1, 0), (1, 0, -1, 0, 1))$ comme base de W , et $v_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (1/2, 1/2, -1, 1, 0)$.

$$\begin{aligned} v_3 &= x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = (1, 0, -1, 0, 1) - \frac{(-1)}{2} (-1, 1, 0, 0, 0) - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2} (1/2, 1/2, -1, 1, 0) \\ &= (1, 0, -1, 0, 1) + 1/2 (-1, 1, 0, 0, 0) - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} (1/2, 1/2, -1, 1, 0) \\ &= (1/5, 1/5, -3/5, -3/5, 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= (-1, 1, 0, 0, 0) \\ v_2 &= (1/2, 1/2, -1, 1, 0) \\ v_3 &= (1/5, 1/5, -3/5, -3/5, 1) \end{aligned}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= 0 \\ v_1 \cdot v_3 &= 0 \\ v_2 \cdot v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Vect}(x_1, x_2, x_3) = W = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$
 (v_1, v_2, v_3) est une base orthogonale de W .

9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)



Là, j'ai $1/10 + 1/10$, ça fait $1/5$, $+2/5$, ça fait $3/5$, $-3/5 + 0$, donc ça, ça fait 0. Donc on vérifie que v_1 produit scalaire v_2 est 0; v_1 produit scalaire v_3 est 0; et v_2 produit scalaire v_3 aussi. Maintenant, vous pouvez aussi vérifier, et c'est ce que j'ai déjà fait, mais je ne vais pas le faire ici, on vérifie ça aussi, on vérifie que le Vect de x_1, x_2, x_3 , qui était notre W , est égal au Vect de v_1, v_2, v_3 . Ces vecteurs sont non nuls, linéairement indépendants dans un espace de dimension 3, et donc, (v_1, v_2, v_3) est une base orthogonale de W . Maintenant, ce qui était demandé, c'était de trouver une base orthonormale, donc je vais juste terminer cette partie.

Notes

Summary



Rappel. On a $(v_1, v_2, v_3) = ((-1, 1, 0, 0, 0), (1/2, 1/2, -1, 1, 0), (1/5, 1/5, -2/5, -3/5, 1))$ comme base orthogonale de W .

Une base orthonormale de W est $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right)$ $\frac{3}{5} + 1$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0, 0, 0), \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1, 0 \right), \sqrt{\frac{5}{8}} \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, 1 \right) \right)$$

9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)



Donc ça, c'est une base orthogonale, donc pour trouver une base orthonormale, donc ça, c'est v_1, v_2, v_3 , c'est... Je prends v_1 , et je divise par sa norme, et v_2 divisé par sa norme; et v_3 divisé par sa norme. Et puis, bon, ça donnerait une base pas du tout aussi jolie, mais... c'est comme ça. Alors, la norme de v_1 ... La norme au carré, c'était 2. On a $1/\sqrt{2}$ qui multiplie v_1 . Ensuite, la norme au carré de v_2 , c'était... C'était quoi ? Il faut que je m'en rappelle. C'était 5/2, et donc quand je divise par ça, la racine carrée, donc j'aurais $\sqrt{(2/5)}$, qui multiplie v_2 . Et puis ici, la norme au carré... Bon je n'ai pas encore calculé, donc j'ai $1/25 + 1/25$, ça fait 2/25... + 4/25, ça fait 6/25... + 9/25, ça fait 15/25, donc j'ai 3/5... + 1, donc ça, c'est 8/5. Je vais diviser par $\sqrt{(8/5)}$, donc j'ai $\sqrt{(5/8)}$, qui multiplie v_3 . Bon, ce n'est pas très joli, mais c'est ce que c'est.

Notes

Summary



15m 38s

Rappel. On a $(v_1, v_2, v_3) = ((-1, 1, 0, 0, 0), (1/2, 1/2, -1, 1, 0), (1/5, 1/5, -2/5, -3/5, 1))$ comme base orthogonale de W .

Une base orthonormale de W est $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right)$ $\frac{3}{5}+1$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0, 0), \sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1, 0\right), \sqrt{\frac{5}{8}}\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right) \right) = B$$

$w_1 \qquad w_2 \qquad w_3$

Dernière question: Exprimer le vecteur $v = (1, 1, -2, 0, 2)$ en termes de la base B .

Rappel Les coordonnées de v par rapport à la base orthonormale B sont $\langle v, w_1 \rangle, \langle v, w_2 \rangle, \langle v, w_3 \rangle$.

$$\langle v, w_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0) = 0$$

$$\langle v, w_2 \rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}(3)$$

,

9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)



Donc ça, c'est une base orthonormale de W . Et puis, il y avait la dernière question que je vous rappelle. C'était d'exprimer le vecteur v égal à $(1, 1, -2, 0, 2)$ en termes de cette base-là. On va lui donner un nom: B . Bon maintenant, je rappelle... Donc d'abord, je vais donner un nom aux vecteurs dans la base B , Donc je vais appeler ça w_1, w_2, w_3 . Et puis, donc je rappelle les coordonnées de v par rapport à la base orthonormale B sont... les trois coordonnées sont v produit scalaire avec w_1 , et ensuite v produit scalaire avec w_2 , et ensuite v produit scalaire avec w_3 . Donc je calcule ces produits scalaires, donc le produit scalaire de v avec w_1 est égal à $1/\sqrt{2}$ et ensuite, j'ai $-1+1+0$, donc ça, c'est 0. Ensuite, v produit scalaire avec w_2 . Donc là, j'ai $\sqrt{(2/5)}$, qui multiplie... Donc là, j'ai $1/2+1/2$ donc ça, c'est 1... +2. Donc ça, c'est 3. Et puis, le produit scalaire de v avec w_3 , donc ça, c'est $\sqrt{(5/8)}$ qui multiplie...

Notes

Summary



17m 18s

Rappel. On a $(v_1, v_2, v_3) = ((-1, 1, 0, 0, 0), (1/2, 1/2, -1, 1, 0), (1/5, 1/5, -2/5, -3/5, 1))$ comme base orthogonale de W .

Une base orthonormale de W est $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right)$ $\frac{3}{5} + 1$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0, 0), \sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1, 0\right), \sqrt{\frac{5}{8}}\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right) \right) = B$$

$w_1 \qquad w_2 \qquad w_3$

Dernière question: Exprimer le vecteur $v = (1, 1, -2, 0, 2)$ en termes de la base B .

Rappel Les coordonnées de v par rapport à la base orthonormale B sont $\langle v, w_1 \rangle, \langle v, w_2 \rangle, \langle v, w_3 \rangle$.

Donc $v = 3\sqrt{\frac{2}{5}}w_2 + \frac{16}{5}\sqrt{\frac{5}{8}}w_3$.

$$\langle v, w_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0) = 0$$

$$\langle v, w_2 \rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}(3)$$

$$\langle v, w_3 \rangle = \sqrt{\frac{5}{8}}\left(\frac{16}{5}\right)$$

Vérification: $3\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1, 0\right) + \frac{16}{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{8}} \cdot \sqrt{\frac{5}{8}}\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right)$

$$= 3 \cdot \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1, 0\right) + \frac{16}{5} \cdot \frac{5}{8} \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right)$$

$$= \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, 0\right) + \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}, 2\right) = (1, 1, -2, 0, 2)$$

9.7 Procédé de Gram-Schmidt (suite)



Et là, j'ai $1/5 + 1/5$, c'est $2/5$... $+4/5$ c'est $6/5$... $+0 + 10/5$, donc $16/5$. Donc voilà les coordonnées. Donc v est égal à $3\sqrt{(2/5)}w_2 + 16/5\sqrt{(5/8)}w_3$. Donc ça, c'est la réponse. Maintenant, j'aimerais faire une vérification pour vous convaincre que ça joue, qu'on a bien fait nos calculs ce qui n'est pas demandé. Donc, vérification. Je fais $3\sqrt{(2/5)}$ qui multiplie w_2 ... $+16/5\sqrt{(5/8)}$ qui multiplie w_3 , qui est $\sqrt{(5/8)}$ qui multiplie $(1/5, 1/5, -2/5, -3/5, 1)$. Et puis, donc je trouve ici $3 \cdot 2/5$ qui multiplie $(1/2, 1/2, -1, 1, 0) + \dots$ ici j'ai $16/5 \cdot 5/8$, qui multiplie ça. Et puis, ici, donc enfin j'ai $6/5$, donc là, j'ai $(3/5, 3/5, -6/5, 6/5, 0)$ plus, ici je simplifie et j'ai 2 , donc j'ai $(2/5, 2/5, -4/5, -6/5, 2)$. Et quand j'additionne ça, j'ai $5/5 = 1$, $5/5 = 1$, $-10/5 = -2$, ça c'est 0 , et 2 , donc c'est effectivement égal à $(1, 1, -2, 0, 2)$.

Notes

Summary



19m 18s