



9.8 La projection orthogonale sur un sous-espace



Dans les vidéos précédentes, nous avons vu comment construire une base orthogonale ou une base orthonormale d'un espace vectoriel donné. J'aimerais ici vous donner une première application de ça. J'espère que je vous ai convaincu de l'utilité d'avoir une base orthonormée. Mais, on aura plusieurs applications et ceci est la première application. On parle de la projection orthogonale sur un sous-espace.

Notes

Summary



0m 03s

Definition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V . Posons

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \forall w \in W\}.$$

On appelle $W^\perp$ l'orthogonal à W dans V .

Proposition $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V .

Preuve On a $0 \in W^\perp$ car $\langle 0, w \rangle = 0$ pour tout $w \in W$.



9.8 La projection orthogonale sur un sous-espace

D'abord, je me donne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et un sous-espace de V . Ensuite, je fixe une notation, je pose : $W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$. Ça veut dire que ce vecteur v est orthogonal à tout l'espace W . Je prends l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tout l'espace W , et j'appelle ça l'orthogonal à W dans V . La première chose, c'est que j'aimerais vous convaincre que ce $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V . C'est la première propriété. Proposition : Avec les notations comme ici dans la définition, $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V . Ça fait un petit moment que nous n'avons pas fait ça donc je fais la preuve. D'abord je montre que $W^\perp$ n'est pas vide car le vecteur 0 est dedans. Donc on a 0 dans $W^\perp$ car si on fait $\langle 0, w \rangle$, je trouve 0 . Et ça, pour tout $w \in W$, et même pour tout $v \in V$. Donc le $W^\perp \neq \emptyset$. Et maintenant je prends deux vecteurs dans $W^\perp$ et un scalaire de $\mathbb{R}$.

Notes

Summary



0m 31s

Definition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V . Posons

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \forall w \in W\}.$$

On appelle $W^\perp$ l'orthogonal à W dans V .

Proposition $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V .

Preuve On a $0 \in W^\perp$ car $\langle 0, w \rangle = 0$ pour tout $w \in W$. Dm $W^\perp \neq \emptyset$.

Soient $v_1, v_2 \in W^\perp$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\langle v_1, w \rangle = 0$ et $\langle v_2, w \rangle = 0$ pour tout $w \in W$.

Soit $w \in W$. $\langle \lambda v_1 + v_2, w \rangle = \langle \lambda v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$.
 $\Rightarrow \lambda v_1 + v_2 \in W^\perp$. Dm $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V . $\square$

Noter: $W \cap W^\perp = \{0\}$ car si $w \in W$ et $w \in W^\perp$ alors $\langle w, w \rangle = 0 \Rightarrow w = 0$.
 Dm $W + W^\perp = W \oplus W^\perp$.

9.8 La projection orthogonale sur un sous-espace



Donc comme v_1 et v_2 sont dans $W^\perp$, on a que $\langle v_1, w \rangle = 0$ et $\langle v_2, w \rangle = 0$ et ça pour tout $w \in W$. Et maintenant je prends la combinaison linéaire : $\lambda v_1 + v_2$, et je fais le produit scalaire avec $w \in W$. Utilisant la linéarité, j'ai : $\langle \lambda v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$ Et le λ il sort : $\lambda \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$ Et ça, c'est : $\lambda \cdot 0 + 0 = 0$ Donc ça veut dire que : $\lambda v_1 + v_2 \in W^\perp$ Donc $W^\perp \neq \emptyset$ et chaque fois que j'ai deux vecteurs dans $W^\perp$ et un scalaire, la combinaison linéaire appartient aussi, donc $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel. Ça, c'est la preuve de cette proposition. Maintenant, juste une chose à noter : $W \cap W^\perp$, c'est juste le vecteur nul car si w est dans l'intersection, alors quand je fais le produit scalaire de w avec lui-même, je trouve 0. Et ça, ça implique que $w = 0$ et c'est un des axiomes pour un produit scalaire. Donc ça veut dire que si je fais la somme de ces deux sous-espaces, ça fait un plus grand sous-espace, alors c'est la somme directe. C'est juste une remarque que je voulais faire.

Notes

Summary



2m 07s

Exemples ① $V = \mathbb{R}^3$, produit scalaire usuel.

W une droite, c'est un sous-espace de dimension 1.

$W^\perp$ le plan passant par $(0,0,0)$ orthogonal à la droite W .

② $V = \mathbb{R}^3$, produit scalaire usuel.

U un plan (passant par $(0,0,0)$), c'est un sous-espace vectoriel de dimension deux.

$U^\perp$ la droite

9.8 La projection orthogonale sur un sous-espace



Maintenant deux exemples, où on voit ce que ça donne. D'abord, si je prends $V = \mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire usuel, Et je prends W une droite, c'est-à-dire un sous-espace de dimension 1. Alors qu'est-ce que $W^\perp$? Ce sont tous les vecteurs qui sont orthogonaux à cette droite. Et on sait qu'une direction définit un plan, donc le plan qui est orthogonal. Ceci est le plan passant par l'origine car c'est un sous-espace qui est orthogonal à la droite W . Donc ça, c'est un cas. Deuxième exemple, prenons de nouveau $\mathbb{R}^3$, et le produit scalaire usuel. Cette fois, je prends U , un plan passant par l'origine. Ici, j'aurais dû dire une droite passant par l'origine. Un plan, donc c'est-à-dire un sous-espace de dimension 2. Qu'est-ce que $U^\perp$? Je dois prendre tous les vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à ce plan. Ça sera exactement la droite passant par $(0,0,0)$ qui est le vecteur directeur normal au plan U . La droite passant par l'origine, définie par le vecteur normal c'est-à-dire orthogonal du plan U .

Notes

Summary



4m 10s

Exemples ① $V = \mathbb{R}^3$, produit scalaire usuel.

W une droite, c'est un sous-espace de dimension 1.

$W^\perp$ le plan passant par $(0,0,0)$ orthogonal à la droite W .

② $V = \mathbb{R}^3$, produit scalaire usuel.

U un plan (passant par $(0,0,0)$), c'est un sous-espace vectoriel de dimension deux.

$U^\perp$ la droite (passant par $(0,0,0)$) définie par le vecteur normal du plan U .

9.8 La projection orthogonale sur un sous-espace



Dans ce cas-là, on voit très bien : On a l'espace $\mathbb{R}^3$, on a une droite alors l'orthogonale à cette droite est un plan, ou bien, on a un plan, l'orthogonale au plan, c'est une droite. On étudie le cas général. Je montre une proposition. Je remarque que si on a une droite et le plan orthogonal alors on peut écrire : tout vecteur dans $\mathbb{R}^3$ comme une somme d'un vecteur dans la droite est un vecteur dans un plan. Si on a un plan et une droite, c'est symétrique. C'est ce qu'on aimerait montrer en général.

Notes

Summary



6m 24s

Proposition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, i.e. V est un espace euclidien. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V . Pour tout $v \in V$, il existe $w \in W$, $x \in W^\perp$ tels que $v = w + x$. De plus, w et x sont uniquement déterminés par v .

Preuve Si $W = \{0\}$, alors $W^\perp = V$ et pour $v \in V$ on écrit $v = 0 + v$.
Si $W \neq \{0\}$, fixons une base $(w_1, \dots, w_k)$ de W et complétons la en une base de V :



9.8 La projection orthogonale sur un sous-espace



Voilà la proposition : je me donne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire donc c'est-à-dire que j'ai un espace euclidien et je me donne un sous-espace vectoriel de V . Maintenant pour tout $v \in V$, je peux trouver un vecteur dans W et un vecteur dans $W^\perp$ tels que le v soit une somme de ces deux vecteurs. De plus, w et x sont uniquement déterminés par le vecteur v . Donc il n'y a qu'une seule façon de faire cette écriture. Chaque vecteur se découpe en deux parties, une somme de deux parties : une partie dans W , une partie dans $W^\perp$. Vous allez voir pourquoi j'utilise une dimension finie; car je vais utiliser notre algorithme de procédé de Gram-Schmidt pour la preuve. Si $W = \{0\}$ alors $W^\perp = V$. Et pour $v \in V$, on écrit simplement $v = 0 + v$. On a notre somme. Si $W \neq \{0\}$, je fixe une base $(w_1, \dots, w_k)$ de W et je la complète en une base de V . J'ai la première partie de la base : la base de W . Et ensuite, je finis avec d'autres vecteurs dans V pour que ça fasse une base de V .

Notes

Summary



Proposition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, i.e. V est un espace euclidien. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V . Pour tout $v \in V$, il existe $w \in W$, $x \in W^\perp$ tels que $v = w + x$. De plus, w et x sont uniquement déterminés par v .

Preuve Si $W = \{0\}$, alors $W^\perp = V$ et pour $v \in V$ on écrit $v = 0 + v$.

Si $W \neq \{0\}$, fixons une base $(w_1, \dots, w_k)$ de W et complétons la en une base de V : $(w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Utilisons le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ de V .

9.8 La projection orthogonale sur un sous-espace



Maintenant, j'applique le procédé de Gram-Schmidt : pour trouver une base orthogonale à partir de cette base, je vais donner un nom : ce sera $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$. Ça, c'est une base orthogonale de V . Mais, comme une partie du procédé de Gram-Schmidt dit que pour chaque i , le sous-espace engendré par $\{v_1, \dots, v_i\}$ est le même que le sous-espace engendré par $\{w_1, \dots, w_i\}$. On sait que ces k premiers vecteurs là engendrent le sous-espace W , et donc ça fait une base orthogonale de W . Donc, par les propriétés de ce procédé de $(v_1, \dots, v_k)$, est une base de W . Et aussi, comme c'est une base orthogonale, nous avons $v_j \in W^\perp$ pour tout j entre $k+1$ et n . Les premiers éléments de la base sont une base de W , et tous les suivants sont des éléments dans $W^\perp$. Je cherche maintenant à écrire : v un vecteur quelconque comme quelque chose dans W plus quelque chose dans $W^\perp$. Ça, c'est une base.

Notes

Summary



9m 00s

Proposition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, i.e. V est un espace euclidien. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V . Pour tout $v \in V$, il existe $w \in W$, $x \in W^\perp$ tels que $v = w + x$. De plus, w et x sont uniquement déterminés par v .

Preuve Si $W = \{0\}$, alors $W^\perp = V$ et pour $v \in V$ on écrit $v = 0 + v$.

Si $W \neq \{0\}$, fixons une base $(w_1, \dots, w_k)$ de W et complétons la en une base de V : $(w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Utilisons le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ de V . Par les propriétés de ce procédé, $(v_1, \dots, v_k)$ est une base de W . Aussi, $v_j \in W^\perp$ pour $k+1 \leq j \leq n$. Pour $v \in V$, on a

$$v = \underbrace{\frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 + \dots + \frac{\langle v, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k}_{\in W} + \underbrace{\frac{\langle v, v_{k+1} \rangle}{\langle v_{k+1}, v_{k+1} \rangle} v_{k+1} + \dots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n}_{\in W^\perp}.$$

On a $v = w + x$, $w \in W$, $x \in W^\perp$.

9.8 La projection orthogonale sur un sous-espace



Je sais qu'on peut écrire v comme une combinaison linéaire de cette base, donc pour $v \in V$ on a : (En plus on sait quels sont les coefficients), donc $v = \langle v, v_1 \rangle / \langle v_1, v_1 \rangle v_1$, ça, c'est le coefficient de v_1 , et ensuite on complète de la même manière. Après j'arrive au terme avec v_k et ensuite les autres jusqu'au dernier. Comme on a dit : les vecteurs $v_1, \dots, v_k \in W$. Donc ça, c'est un vecteur dans W . Et $v_{k+1}, \dots, v_n \in W^\perp$, donc si je pose ce vecteur-là w et ce vecteurs-là x , j'ai la somme $v = w + x$ comme souhaité. On a $v = w + x$ pour un $w \in W$ et $x \in W^\perp$. Donc on a la première partie de cette proposition. Maintenant il y a la question d'unicité : est ce qu'on pourrait faire cette écriture de deux façons différentes ?

Notes

Summary



10m 47s

Unicité : Supposons que $v = w + x = w' + x'$ pour $w, w' \in W$ et $x, x' \in W^\perp$.

$$\text{On a } \underbrace{w - w'}_W = \underbrace{x' - x}_{W^\perp} \in W \cap W^\perp = \{0\}.$$

$$\text{Donc } w = w' \text{ et } x = x'. \quad \square$$

Définition. Soient V et W comme ci-dessus, $v \in V$, $v = w + x$, $w \in W$, $x \in W^\perp$. On appelle w la **projection orthogonale** de v sur W et on écrit $w = \text{proj}_W v$.

9.8 La projection orthogonale sur un sous-espace



Supposons qu'on puisse écrire $v = w + x$, mais aussi $v = w' + x'$ pour $w, w' \in W$ et $x, x' \in W^\perp$. Si on peut faire ça, on a $w - w' = x' - x$ et d'un côté, c'est un vecteur qui appartient à W car W est un sous-espace et c'est la somme de deux vecteurs dans W . Et ça, ça appartient à $W^\perp$ car x et x' sont dans $W^\perp$ et $W^\perp$ est un sous-espace, donc c'est un vecteur qui appartient à l'intersection. Mais, comme on a déjà remarqué, cette intersection est $\{0\}$. Donc, on a que : $w = w'$ et $x = x'$. On a une unicité de l'expression. Il y a une seule façon d'écrire un vecteur v comme une somme d'un vecteur dans W et d'un vecteur dans $W^\perp$. Ça, c'est la proposition. L'existence et l'unicité de cette somme nous permettent de faire la définition suivante : je me donne V , un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire, et W , un sous-espace vectoriel de V . Je me donne un vecteur dans V et je sais maintenant que je peux l'écrire comme une somme d'un vecteur dans W et un vecteur dans $W^\perp$. Alors on va appeler la partie qui est dans W : la projection orthogonale de v sur W .

Notes

Summary



12m 18s

Unicité: Supposons que $v = w + x = w' + x'$ pour $w, w' \in W$ et $x, x' \in W^\perp$.

$$\text{On a } \underbrace{w - w'}_W = \underbrace{x' - x}_{W^\perp} \in W \cap W^\perp = \{0\}.$$

$$\text{Donc } w = w' \text{ et } x = x'. \quad \square$$

Définition. Soient V et W comme ci-dessus, $v \in V$, $v = w + x$, $w \in W$, $x \in W^\perp$. On appelle w la **projection orthogonale** de v sur W et on écrit $w = \text{proj}_W v$.

Remarque Pour calculer $\text{proj}_W v$



9.8 La projection orthogonale sur un sous-espace



Notes

On fixe une notation qui est similaire à la notation que nous avons utilisée avant. On écrit : w est la projection de ce v sur W . Au niveau de la géométrie de $\mathbb{R}^3$, c'est exactement la projection qu'on aurait définie usuellement. Si le W est un plan, c'est la projection orthogonale sur le plan. Si W est une droite, c'est la projection orthogonale sur la droite. C'est donc la projection orthogonale de V sur W . Maintenant, je vais faire les applications et après on va calculer ces projections. Puis j'aimerais vous faire remarquer avant de terminer ici, l'exemple sera dans la prochaine vidéo, j'aimerais terminer par une remarque très utile : si on voulait vraiment calculer ce w -là, que faudrait-il calculer pour trouver la projection sur W de v ? Il faut vous rappeler de ce qu'était la partie w dans cette somme-là. On a exprimé v en termes d'une base orthogonale pour V , mais on a utilisé que la partie dans la base orthogonale pour W . Donc nous n'avons besoin que d'une base orthogonale de W et non pas la base entière.

Summary



14m 12s

Unicité : Supposons que $v = w + x = w' + x'$ pour $w, w' \in W$ et $x, x' \in W^\perp$.

$$\text{On a } \underbrace{w - w'}_W = \underbrace{x' - x}_{W^\perp} \in W \cap W^\perp = \{0\}.$$

$$\text{Donc } w = w' \text{ et } x = x'. \quad \square$$

Définition. Soient V et W comme ci-dessus, $v \in V$, $v = w + x$, $w \in W$, $x \in W^\perp$. On appelle w la **projection orthogonale** de v sur W et on écrit $w = \text{proj}_W v$.

Remarque Pour calculer $\text{proj}_W v$, nous n'avons que besoin d'une base orthogonale de W .
Ensuite, par l'unicité de l'expression, on a
$$v = \text{proj}_W v + \underbrace{(v - \text{proj}_W v)}_{W^\perp}.$$



9.8 La projection orthogonale sur un sous-espace

Ensuite par l'unicité de l'expression, on a que notre v est égal à $\text{proj}_W(v) + (v - \text{proj}_W(v))$. On va chercher cette partie-là, puis l'autre partie doit forcément être la différence des deux par unicité de l'expression. Parce que vous pouvez vérifier que ceci est dans l'orthogonale. On va travailler comme ça.

Notes

Summary



15m 52s