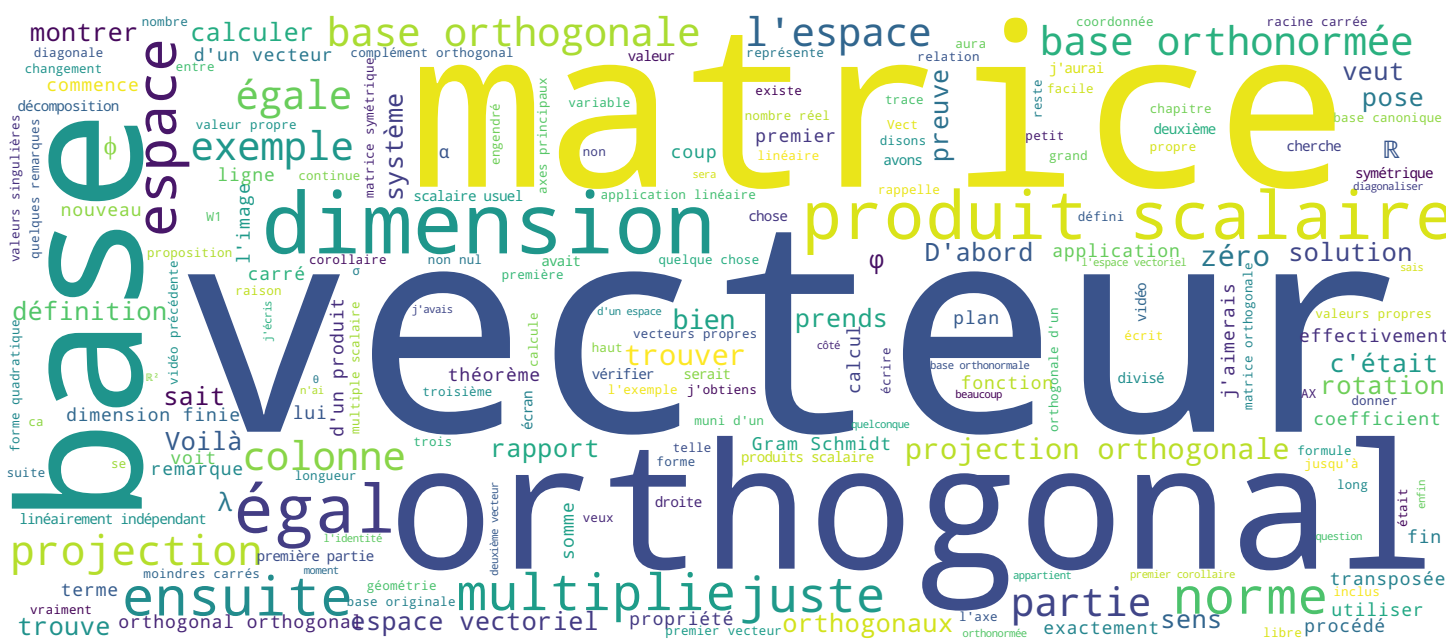


Chapitre 9 : Produits scalaires et espaces euclidiens

9.9 La projection orthogonale sur un sous-espace : exemple et remarques supplémentaires

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Video





9.9 La projection orthogonale sur un sous-espace: exemple et remarques supplémentaires



Dans cette vidéo, nous allons appliquer la procédure que j'ai décrite dans la preuve pour trouver la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace; aussi, nous allons calculer un complément orthogonal que je vais définir; et ensuite, je fais quelques remarques sur la dimension de l'espace W orthogonal.

Notes

Summary



0m 04s

Exemple. Soit $V = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Soit $W = \text{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 0, -1, 1)$ et $v_2 = (1, 0, 0, 0)$. Trouver :

- la projection orthogonale de $v = (3, 2, -1, -1)$ sur W , et
- une base de $W^\perp$.

D'abord, cherchons une base orthogonale de W ; Base (v_1, v_2) .

Puis $w_1 = v_1 = (1, 0, -1, 1)$



9.9 La projection orthogonale sur un sous-espace: exemple et remarques supplémentaires



Je commence par un exemple de calcul, je me donne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et un sous-espace W , engendré par ces vecteurs-là, donc W est de dimension 2 parce qu'on voit que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants. Alors je veux trouver la projection orthogonale d'un vecteur v sur l'espace W , et j'aimerais aussi calculer une base de W orthogonal. D'abord, je cherche une base orthogonale de W , c'est la remarque que j'avais faite juste à la fin de la vidéo précédente, c'est que pour cette première partie, nous n'avons besoin que d'une base orthogonale de W . D'abord, cherchons une base orthogonale de W . J'utilise le procédé de Gram-Schmidt, j'ai la base (v_1, v_2) , et je pose $w_1 = v_1$, donc ça, c'est juste le vecteur $(1, 0, -1, 1)$. Maintenant, w_2 est égal à v_2 moins le produit scalaire $\langle v_2, w_1 \rangle$ sur $\langle w_1, w_1 \rangle$ fois w_1 , donc ça, c'est la projection de v_2 sur w_1 .

Notes

Summary



0m 26s

Exemple. Soit $V = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Soit $W = \text{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 0, -1, 1)$ et $v_2 = (1, 0, 0, 0)$. Trouver :

- la projection orthogonale de $v = (3, 2, -1, -1)$ sur W , et
- une base de $W^\perp$.

D'abord, cherchons une base orthogonale de W : Base (v_1, v_2) .

Posons $w_1 = v_1 = (1, 0, -1, 1)$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (1, 0, 0, 0) - \frac{1}{3} (1, 0, -1, 1) = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

9.9 La projection orthogonale sur un sous-espace: exemple et remarques supplémentaires



Ici, j'ai v_2 , qui est $(1, 0, 0, 0)$ moins le produit scalaire de v_2 avec w_1 , mais w_1 , c'est juste v_1 , donc là, j'ai 1, ensuite, le produit scalaire de w_1 avec lui-même, c'est $1 + 1 + 1 = 3$, qui multiplie w_1 , donc je calcule, j'ai $(1 - 1/3) = 2/3, 0, 1/3, -1/3)$. Donc ça, c'est le deuxième vecteur.

Notes

Summary



1m 52s

Base orthogonale de $W = (\underbrace{(1, 0, -1, 1)}_{w_1}, \underbrace{(2/3, 0, 1/3, -1/3)}_{w_2})$

$v = (3, 2, -1, -1)$

$$\text{proj}_W v = \frac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + \frac{v \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = \frac{3}{3} (1, 0, -1, 1)$$

9.9 La projection orthogonale sur un sous-espace: exemple et remarques supplémentaires



Alors, je reprends ces deux vecteurs sur la prochaine slide, j'ai une base orthogonale de W , que nous venons de calculer, c'est $(1, 0, -1, 1)$, et puis $(2/3, 0, 1/3, -1/3)$, alors, on peut vite vérifier que c'est effectivement ces deux vecteurs qui sont orthogonaux, donc j'ai $2/3 + 0 - 1/3 - 1/3 = 0$, c'est juste. Et maintenant, je suis censée calculer la projection orthogonale du vecteur v sur l'espace W . Donc v , c'était le vecteur $(3, 2, -1, -1)$, et la projection orthogonale de ce vecteur v sur l'espace W , comme on l'a vu dans la preuve, c'est exactement $v \dots$ Donc ça, c'était w_1 et w_2 . Donc c'est $\langle v, w_1 \rangle$ sur $\langle w_1, w_1 \rangle$ qui multiplie w_1 , plus $\langle v, w_2 \rangle$ sur $\langle w_2, w_2 \rangle$ qui multiplie w_2 . Je fais tout le calcul, ici, donc le premier, là, j'ai $3 + 0 + 1 - 1$, donc j'ai 3 sur 3 qui multiplie le premier vecteur. Et ensuite plus, et là, j'ai $2 + 0 - 1/3 + 1/3$, donc là, j'ai 2, divisé par, là, j'ai $4/9 + 2/9$ qui multiplie $(2/3, 0, 1/3, -1/3)$, et puis je simplifie tout ça, et je trouve $(3, 0, 0, 0)$.

Notes

Summary



2m 24s

Base orthogonale de $W = (\underbrace{(1,0,-1,1)}_{w_1}, \underbrace{(2/3, 0, 1/3, -1/3)}_{w_2})$

$W = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$$v = (3, 2, -1, -1)$$

$$\text{proj}_W v = \frac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + \frac{v \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = \frac{3}{3} (1, 0, -1, 1) + \left(\frac{2}{\frac{4}{9} + \frac{2}{9}} \right) \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

$$= \underline{(3, 0, 0, 0)}$$

$$\text{On a } v = (3, 2, -1, -1) = \underbrace{(3, 0, 0, 0)}_{\substack{\uparrow \\ W}} + \underbrace{(0, 2, -1, -1)}_{\substack{\uparrow \\ W^\perp}}$$

9.9 La projection orthogonale sur un sous-espace: exemple et remarques supplémentaires



Ici, tout ça, c'est $6/9$, donc c'est $2/3$ quand je multiplie en haut, ça me donne un coefficient de 3 devant. Donc tout ça, c'est égal à 3 . Et après, j'ai $1 + 2 = 3$, $0, -1 + 1$, c'est 0 . Et $1 - 1 = 0$. Oui, c'est juste. Et puis maintenant, ça, c'est la projection, et si on veut trouver... ça, c'était ce qui était donné, mais je trouve la décomposition; on a que v est égal à $(3, 2, -1, -1)$, c'est cette partie-là, qui est dans W , plus ce qui reste, cette partie-là, qui devrait être dans W orthogonal, on peut vérifier. Donc la base originale de W , donc W , c'était le Vect des vecteurs $(1, 0, -1, 1)$ et $(1, 0, 0, 0)$. Déjà, on voit que ça, c'est dans W , parce que c'est un multiple scalaire de ce vecteur, et est-ce que ce vecteur-là, il est dans W orthogonal ? Eh bien, je fais les deux produits scalaires, donc j'ai $0 + 0 + 1 - 1$, et là, j'ai 0 , donc effectivement, donc ça, c'est dans W orthogonal, ça, c'est dans W . Donc j'ai décomposé le vecteur V dans la partie qui est dans W , donc ça, c'est la projection, et puis une partie qui est dans W orthogonal. Et maintenant, je continue, je vais trouver une base de W orthogonal.

Notes

Summary



Base de $W^\perp$. $W = \text{Vect}((1,0,-1,1), (1,0,0,0))$

$$(a,b,c,d) \in W^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} a-c+d=0 \\ a=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=0 \\ b \text{ libre} \\ c=d, d \text{ libre} \end{matrix}$$

$$W^\perp = \{(0,b,d,d) \mid b,d \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{base de } W^\perp = (0,1,0,0), (0,0,1,1).$$

9.9 La projection orthogonale sur un sous-espace: exemple et remarques supplémentaires



Donc ici, pour ça, je ne vais pas utiliser la base compliquée de W , je vais utiliser la base originale, donc W , c'est le Vect de $(1,0,-1,1)$ et $(1,0,0,0)$. Donc si on prend un vecteur (a,b,c,d) , c'est dans W orthogonal si et seulement si les deux produits scalaires sont égaux à 0. Donc j'ai $a - c + d = 0$ et $a = 0$. Donc ce système, ça donne la relation $a = 0$, b libre, et $c = d$, d libre. Donc ici, je peux écrire W orthogonal, c'est tous les vecteurs $(0,b,d,d)$, où b et d peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. Et donc une base de W orthogonal, ça serait... Donc je pose $b = 1$ et $d = 0$, ou bien, je pose $b = 0$ et $d = 1$. Voilà, on a fait tout ce qui était demandé dans l'exemple, on avait un sous-espace, nous avons calculé la projection orthogonale d'un vecteur dans ce sous-espace, et on a également calculé la décomposition de ce vecteur en la partie une somme, une partie dans W , une partie dans W orthogonal, et, à la fin, une base de W orthogonal. Maintenant, j'aimerais terminer par quelques remarques sur cette notion d'orthogonalité dans le cas d'un espace de dimension finie.

Notes

Summary



Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Corollaire 1 (de Gram-Schmidt). Soit W un sous-espace vectoriel de V . Alors $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

Corollaire 2. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel. Alors $(W^\perp)^\perp = W$.

Preuve de 1



9.9 La projection orthogonale sur un sous-espace: exemple et remarques supplémentaires

Je ne l'ai pas écrit ici, sur la slide, mais je vais l'écrire tout en haut, parce que c'est une hypothèse importante pour ces deux corollaires. Soit V , un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire. Alors, le premier corollaire, c'est que - c'est un corollaire du procédé de Gram-Schmidt - c'est que si on a un sous-espace vectoriel de V , on sait que W est aussi de dimension finie, et W orthogonal aussi, alors il y a une relation, c'est que la dimension de W orthogonal, c'est la dimension de V moins la dimension de W . Et on va utiliser ça pour montrer un deuxième corollaire, qui est : si je fais deux fois l'orthogonal d'un sous-espace... Ici, je n'ai pas fini la phrase, alors W orthogonal orthogonal est égal à W . Il manquait la fin de l'énoncé. D'abord, je vais montrer le premier corollaire. Donc preuve de 1. Ici, je répète un argument donné dans la vidéo 9.8, où j'ai défini la projection orthogonale sur un sous-espace. Peut-être que ça vaut la peine de revoir l'idée de la preuve, parce qu'on commence avec une base de W , en complétant une base de V , donc soit $w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ une base de V avec la première partie, $(w_1, \dots, w_k)$, une base de W .

Notes

Summary



7m 57s

Sont V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Corollaire 1 (de Gram-Schmidt). Soit W un sous-espace vectoriel de V . Alors $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

Corollaire 2. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel. Alors $(W^\perp)^\perp = W$.

Preuve de 1 Soit $(w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ une base de V avec $(w_1, \dots, w_k)$ une base de W .
On utilise le procédé de G-S pour trouver une base orthogonale de V $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ telle que $(v_1, \dots, v_k)$ est une base de W . On a $v_{k+1}, \dots, v_n \in W^\perp$. Donc $\dim W^\perp \geq n - k$.
Mais comme $\dim(W + W^\perp) = \dim(W \oplus W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp = k + \dim W^\perp \leq n$
Donc $\dim W^\perp \leq n - k \Rightarrow \dim W^\perp = n - k$. 13

9.9 La projection orthogonale sur un sous-espace: exemple et remarques supplémentaires



Maintenant, on utilise le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale de V , $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ telle que cette première partie-là, $v_1, \dots, v_k$ est une base de W . Donc maintenant, il suffit de voir que ce qui est là, c'est une base de W orthogonal, donc on a que $v_{k+1}, \dots, v_n$ appartient à W orthogonal, donc la dimension... - et puis ils sont linéairement indépendants - donc la dimension de W orthogonal est au moins $n - k$. Mais comme la dimension de $W + W$ orthogonal est égale à la dimension de $W \oplus W^\perp$, on a déjà remarqué, ça, c'est la dimension de W plus la dimension de W orthogonal. La dimension de W est égale à k plus la dimension de W orthogonal, et comme ça, c'est un sous-espace, c'est au plus n . Donc la dimension de W orthogonal, c'est au plus $n - k$. Du coup, la dimension de W orthogonal est égale à $n - k$, ce qui était le constat ici. Donc ça, c'est le corollaire 1. Très bien. Et corollaire 2, preuve de 2.

Notes

Summary



9m 45s

Sont V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Corollaire 1 (de Gram-Schmidt). Soit W un sous-espace vectoriel de V . Alors $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

Corollaire 2. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel. Alors $(W^\perp)^\perp = W$.

Preuve de 1 Soit $(w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ une base de V avec $(w_1, \dots, w_k)$ une base de W .
On utilise le procédé de G-S pour trouver une base orthogonale de V $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ telle que

$(v_1, \dots, v_k)$ est une base de W . On a $v_{k+1}, \dots, v_n \in W^\perp$. Donc $\dim W^\perp \geq n - k$.

Mais comme $\dim(W + W^\perp) = \dim(W \oplus W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp = k + \dim W^\perp \leq n$

Donc $\dim W^\perp \leq n - k \Rightarrow \dim W^\perp = n - k$. □

Preuve de 2 On a par définition $W \subset (W^\perp)^\perp$. Par (*) ,
 $\dim(W^\perp)^\perp = \dim V - \dim W^\perp = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W$. On déduit que $W = (W^\perp)^\perp$.

9.9 La projection orthogonale sur un sous-espace: exemple et remarques supplémentaires



On a par définition que W est inclus dans W orthogonal orthogonal. On réfléchit une minute, donc W orthogonal orthogonal, ça, c'est tous les vecteurs dans V qui sont orthogonaux à tous les vecteurs dans W orthogonal. W est sûrement orthogonal à tous les vecteurs dans W orthogonal. Donc ça, c'est bon. Et on a aussi que par le 1, on a que la dimension de W orthogonal orthogonal est égale à la dimension de V moins la dimension de W orthogonal. Et par 1 de nouveau, c'est la dimension de V moins la dimension de V moins la dimension de W , donc du coup, j'ai la dimension de W . Donc j'ai W qui est inclus dans ce sous-espace, mais qui a la même dimension. Et par une propriété que nous avons montrée, pour la dimension d'un sous-espace, on déduit que W est égal à W orthogonal orthogonal. Je vais effacer ces petits traits-là. Et puis maintenant, ça fait que $W \oplus W^\perp$, c'est un espace, un sous-espace vectoriel de V , mais qui a la dimension égale à la dimension de V , donc ça, c'est égal à V .

Notes

Summary



Sont V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Corollaire 1 (de Gram-Schmidt). Soit W un sous-espace vectoriel de V . Alors $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

Corollaire 2. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel. Alors $(W^\perp)^\perp = W$.

Preuve de 1 Soit $(w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ une base de V avec $(w_1, \dots, w_k)$ une base de W .
On utilise le procédé de G-S pour trouver une base orthogonale de V $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ telle que $(v_1, \dots, v_k)$ est une base de W . On a $v_{k+1}, \dots, v_n \in W^\perp$. Dnc $\dim W^\perp \geq n-k$.
Mais comme $\dim(W + W^\perp) = \dim(W \oplus W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp = k + \dim W^\perp \leq n$
Dnc $\dim W^\perp \leq n-k \Rightarrow \dim W^\perp = n-k$.
Preuve de 2 On a par définition $W \subset (W^\perp)^\perp$. Par (*),
 $\dim(W^\perp)^\perp = \dim V - \dim W^\perp = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W$. On déduit que $W = (W^\perp)^\perp$.
 $W \oplus W^\perp = V$. On dit que $W^\perp$ est le complément orthogonal à W dans V .



9.9 La projection orthogonale sur un sous-espace: exemple et remarques supplémentaires

Et pour cette raison-là, on dit que W orthogonal est le complément orthogonal à W dans V . Donc on peut couper V en deux parties, il y a W , et puis son complément qu'on appelle complément orthogonal, parce que c'est le sous-espace orthogonal à W .

Notes

Summary

