



9.10 La meilleure approximation quadratique



Ici, nous continuons avec nos applications du procédé de Gram-Schmidt. En fait, on va définir ce qui s'appelle la meilleure approximation quadratique, et puis après, je l'utiliserai dans les deux prochains paragraphes du cours, mais d'abord, je dois le définir. Et puis, en fait, on utilise la projection orthogonale sur un sous-espace, et puis on montre que c'est la meilleure approximation d'un vecteur quelconque par un vecteur qui appartient à ce sous-espace, et après on fera un exemple.

Notes

Summary



0m 04s

Proposition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, i.e. V est un espace euclidien. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V . Soit $x \in V$. Alors

$$\|x - \text{proj}_W x\| \leq \|x - y\| \quad \text{pour tout } y \in W.$$



9.10 La meilleure approximation quadratique

Donc, d'abord, je me donne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire, avec V de dimension finie, parce que j'aimerais utiliser la projection orthogonale. Et puis je me donne un sous-espace vectoriel de V . L'énoncé est le suivant : (après, je vais le commenter) c'est que je prends un vecteur dans V , et je fais la distance, donc la norme de la différence entre x et sa projection dans W . Donc ça c'est la distance entre x et cette projection et puis en fait, ce qu'on va montrer, c'est que cette distance-là est plus petite ou égale à la distance entre x et n'importe quel vecteur dans W . Donc ça c'est le minimum qu'on peut trouver pour la distance entre x et un vecteur qui appartient à W . Donc ça, c'est ce que j'aimerais commenter avant la preuve; -- donc, remarque -- donc, cette proposition dit que parmi tous les vecteurs de W , la projection orthogonale sur W de x est, disons, la plus proche de x .

Notes

Summary



0m 38s

Proposition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, i.e. V est un espace euclidien. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V . Soit $x \in V$. Alors

$$\|x - \text{proj}_W x\| \leq \|x - y\| \quad \text{pour tout } y \in W.$$

Remarque Parmi tous les vecteurs de W , $\text{proj}_W x$ est le "plus proche" de x .

$\|x - \text{proj}_W x\|$ = la distance entre x et $\text{proj}_W x$. ←

$\|x - y\|$ = la distance entre x et y

Définition On dit que $\text{proj}_W x$ est la meilleure approximation quadratique par un vecteur dans W .
meilleure approximation au sens des moindres carrés

$$\|x - y\|^2 = \sum (x_i - y_i)^2$$

9.10 La meilleure approximation quadratique



Donc je répète ce que j'ai dit avant -- je vais l'écrire -- x moins cette projection-là est égal à la distance entre x et cette projection et $\|x - y\|$ est égale à la distance entre x et y , et si y , c'est n'importe quel vecteur dans W , donc ce qu'on va montrer, c'est que ce truc-là minimise cette distance. Et pour cette raison -- définition -- on dit que la projection orthogonale de x sur W est la meilleure approximation quadratique de x par un vecteur dans W . On dit aussi que c'est la meilleure approximation au sens des moindres carrés. Et puis, et ça c'est la raison pour laquelle on dit ça, c'est parce que si on fait $\|x - y\|^2$ j'obtiens la somme des $x_i - y_i)^2$, donc c'est une expression quadratique dans les coordonnées $x_i - y_i$, ou bien c'est une somme de carrés. Et puis -- bon, ça c'est dans le cas où on est dans $\mathbb{R}^n$ -- évidemment, on peut avoir différents produits scalaires, mais ça c'est avec le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, ça donnerait une expression comme ça, comme c'est une expression quadratique dans x_i et y_i , on est en train de minimiser cette expression.

Notes

Summary



Proposition. Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, i.e. V est un espace euclidien. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V . Soit $x \in V$. Alors

$$\|x - \text{proj}_W x\| \leq \|x - y\| \quad \text{pour tout } y \in W.$$

Remarque Parmi tous les vecteurs de W , $\text{proj}_W x$ est le "plus proche" de x .

$\|x - \text{proj}_W x\|$ = la distance entre x et $\text{proj}_W x$. ←

$\|x - y\|$ = la distance entre x et y

Définition On dit que $\text{proj}_W x$ est la meilleure approximation quadratique par un vecteur dans W .
meilleure approximation au sens des moindres carrés

$$\left(\|x - y\|^2 = \sum (x_i - y_i)^2 \text{ dans } \mathbb{R}^n \right)$$

9.10 La meilleure approximation quadratique



Notes

Ou bien, au sens des moindres carrés, on est en train de minimiser cette somme de carrés. Bon, ce sont juste des remarques sur l'interprétation de cette proposition, et aussi la définition, une terminologie, et puis maintenant, j'aimerais démontrer la proposition. La preuve ne sera pas difficile.

Summary



3m 52s

Preuve de la proposition: Soit $y \in W$. Soit $x \in V$.

$$x - y = \underbrace{x - \text{proj}_W x}_{\in W^\perp} + \underbrace{\text{proj}_W x - y}_{\in W}.$$

Par Pythagore: $\|x - y\|^2 = \underbrace{\|x - \text{proj}_W x\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\|\text{proj}_W x - y\|^2}_{\geq 0} \geq \|x - \text{proj}_W x\|^2$



9.10 La meilleure approximation quadratique



Alors, je prends un y dans W , quelconque. Et je prends mon x , qui était un vecteur donné, et puis je considère la différence, $x - y$ et puis ceci, je l'écris comme x moins la projection sur W de x , plus la projection sur W de $x - y$. Maintenant, ce vecteur-là, il est dans W orthogonal, ça, on a déjà vu. Et puis ce vecteur-là, bon, ça, c'est dans W , et y , on a choisi dans W aussi, donc ça c'est dans W . Donc ça veut dire que ce vecteur-là est orthogonal à ce vecteur-là. Donc je peux utiliser le théorème de Pythagore. On a que $\|x - y\|^2$ est égale à la somme des carrés de ces normes-là. Donc je répète : on peut faire ça parce que ce vecteur-là est orthogonal à ce vecteur-là. Et puis maintenant, ça, c'est non négatif; ça aussi, parce que ce sont les carrés des normes, donc ceci est au moins aussi grand que le premier terme, ici. Donc on a que le carré de la norme de $x - y$, est plus grand ou égal au carré de la norme de $x - \text{proj}_W(x)$. Et puis maintenant, on prend les racines carrées, ce qu'on peut faire, parce que ces deux normes sont positives, - ça, c'est non négatif - et cette norme aussi, et ça c'est ce qui était dit par la proposition.

Notes

Summary



4m 18s

Preuve de la proposition: Soit $y \in W$. Soit $x \in V$.

$$x - y = \underbrace{x - \text{proj}_W x}_{\in W^\perp} + \underbrace{\text{proj}_W x - y}_{\in W}.$$

Par Pythagore: $\|x - y\|^2 = \underbrace{\|x - \text{proj}_W x\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\|\text{proj}_W x - y\|^2}_{\geq 0} \geq \|x - \text{proj}_W x\|^2$

$$\|x - y\| \geq \|x - \text{proj}_W x\|. \quad \square$$

9.10 La meilleure approximation quadratique

Donc la distance entre x et n'importe quel vecteur dans W , est au moins aussi grande que la distance entre x et la projection de x sur W . Donc celui-là, il est le plus près possible de x . Ça, c'est la fin de la preuve. Et maintenant, dans la prochaine vidéo, je vais chercher une meilleure approximation quadratique de certains vecteurs.

Notes

Summary

