



9.11 La meilleure approximation quadratique: exemple

Maintenant pour mettre en place la théorie, j'ai fait beaucoup d'exemples dans $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel mais en réalité, on travaille souvent dans les espaces de fonctions et donc ici je vais faire un grand exemple qui aura beaucoup de calculs dedans où je vais trouver la meilleure approximation quadratique d'une fonction continue par un polynôme.

Notes

Summary



0m 04s

Exemple. Soit $V = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, avec produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f g \, dx, \quad f, g \in V.$$

Trouver la meilleure approximation quadratique de la fonction $f(x) = |x|$ par un polynôme de degré ≤ 2 .

D'abord, cherchons une base orthogonale de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Base $(1, x, x^2) = (v_1, v_2, v_3)$.



9.11 La meilleure approximation quadratique: exemple



Donc je me donne l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ avec ce produit scalaire là. Et puis, j'aimerais trouver la meilleure approximation quadratique de cette fonction là par un polynôme de degré au plus 2. Maintenant, je fais une remarque, c'est que cet espace là n'est pas un espace de dimension finie mais comme vous avez vu que pour calculer cette approximation quadratique, c'est la projection orthogonale dans le sous espace et pour calculer cette projection, il faut que le sous-espace soit de dimension finie et ici je me donne l'espace des polynômes de degré au plus 2 qui est un espace de dimension finie, d'ailleurs dimension 3. Donc d'abord, je vais chercher une base orthogonale de l'espace des polynômes de degré au plus 2. Donc pour ça, je vais utiliser Gram-Schmidt donc je commence avec la base que nous utilisons d'habitude $1, x, x^2$, que j'appelle v_1, v_2, v_3 et puis ensuite, je cherche une base orthogonale. Donc utilisons Gram-Schmidt.

Notes

Summary



0m 27s

Exemple. Soit $V = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, avec produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f g \, dx, \quad f, g \in V.$$

Trouver la meilleure approximation quadratique de la fonction $f(x) = |x|$ par un polynôme de degré ≤ 2 .

D'abord, cherchons une base orthogonale de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Base $(1, x, x^2) = (v_1, v_2, v_3)$. Utilisons le procédé de Gram-Schmidt.

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = v_2$$

$$\langle v_2, w_1 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot 1 \, dx = 0$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2.$$



9.11 La meilleure approximation quadratique: exemple

Alors, je pose w_1 égal à v_1 donc ça ne change rien et je pose w_2 égal à v_2 moins le produit scalaire de v_2 avec w_1 sur $\langle w_1, w_1 \rangle$ qui multiplie w_1 . Pour calculer ça, je dois calculer ces produits scalaires. Donc le produit scalaire de v_2 avec w_1 c'est l'intégrale de -1 à 1 de $x \cdot 1 \, dx$ et puis comme ça c'est une fonction impaire sur cette intégrale symétrique, ça donne 0 . Donc ici j'obtiens que v_2 . Ensuite, w_3 c'est v_3 moins $\langle v_3, w_1 \rangle$ sur $\langle w_1, w_1 \rangle$ qui multiplie w_1 moins la projection de v_3 sur w_2 . Donc je dois calculer plein de produits scalaires, je passe au prochain slide pour avoir de la place.

Notes

Summary



Rappel. On a $w_1 = 1$, $w_2 = x$, $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$ où $v_3 = x^2$.

$$\langle v_3, w_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \, dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\langle w_1, w_1 \rangle = \int_{-1}^1 1 \, dx = 2$$

$$\langle v_3, w_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x \, dx = 0$$

$$\text{Donc } w_3 = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - 0 = x^2 - \frac{1}{3}.$$



9.11 La meilleure approximation quadratique: exemple



Notes

Donc on avait déjà $w_1=1$ $w_2=x$ et w_3 , je dois calculer. Donc ici, j'ai besoin de calculer $\langle v_3, w_1 \rangle$ Donc ça c'est l'intégrale de -1 à 1 $x^2 \cdot 1 \, dx$ et puis vous calculez et vous obtenez une primitive, $1/3 \cdot x^3$ de -1 à 1 donc j'obtiens $2/3$. Et puis, j'ai aussi besoin d'un produit scalaire de w_1 avec lui-même donc ça c'est de -1 à 1 $1 \cdot dx$ donc là j'obtiens 2 Et puis j'ai aussi besoin du produit scalaire de v_3 avec w_2 donc ça c'est l'intégrale de -1 à 1 $x^2 \cdot x$ C'est une fonction impaire sur cette intégrale symétrique, ça donne 0. Donc, $w_3=v_3$ (qui est x^2) moins le $\langle v_3, w_1 \rangle$ qui est $2/3$... divisé par 2 qui multiplie w_1 qui est 1 et ensuite moins 0. Donc j'ai $x^2 - 1/3$. Donc j'ai une base orthogonale de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ qui est la base donc w_1 c'est 1.

Summary



Rappel. On a $w_1 = 1$, $w_2 = x$, $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$ où $v_3 = x^2$.

$$\langle v_3, w_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \, dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\langle w_1, w_1 \rangle = \int_{-1}^1 1 \, dx = 2$$

$$\langle v_3, w_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x \, dx = 0$$

$$\text{Donc } w_3 = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - 0 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Base orthogonale de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = (1, x, x^2 - \frac{1}{3})$.

9.11 La meilleure approximation quadratique: exemple



C'est que orthogonal, je n'ai pas normalisé. Donc j'ai $1, x, x^2 - 1/3$. Ce que je voulais faire, c'était de calculer la meilleure approximation de la fonction qui est la valeur absolue de x par un polynôme de degré au plus 2 donc je vais faire la projection de cette fonction de valeur absolue dans cet espace là.

Notes

Summary



4m 59s

Une base orthogonale de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est $(w_1, w_2, w_3) = (1, x, x^2 - 1/3)$. La meilleure approximation quadratique de $f(x) = |x|$ par un élément de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est $\text{proj}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} f$.

$$\text{proj}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} f = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 + \frac{\langle f, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x + \frac{\langle f, x^2 - 1/3 \rangle}{\langle x^2 - 1/3, x^2 - 1/3 \rangle} (x^2 - 1/3).$$



9.11 La meilleure approximation quadratique: exemple



Donc je dois calculer cette projection. Donc on a une base orthogonale, la meilleure approximation par un élément est cette projection-là. Donc je calcule la projection. Donc la projection sur les polynômes de degré au plus 2 de cette fonction f est égale: le produit scalaire de f avec le premier élément de la base sur la norme au carré de cet élément fois 1 plus le produit scalaire de f avec deuxième élément de la base sur le produit scalaire de x avec lui même qui multiplie x plus le produit scalaire de f avec le dernier élément de la base sur la norme au carré de ce vecteur et qui multiplie ce troisième vecteur de la base orthogonale. Donc j'ai plein de produits scalaires à calculer. Je ne vais pas donner tous les détails mais si je fais f produit scalaire avec 1, j'ai l'intégrale de -1 à 1 de la valeur absolue dx comme c'est une fonction symétrique, c'est 2 fois l'intégrale de 0 à 1 de la fonction x et là j'obtiens 2 fois, bon la primitive c'est $1/2x^2$ de 0 à 1 donc j'ai 2 fois un demi donc j'ai 1.

Notes

Summary



5m 29s

Une base orthogonale de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est $(w_1, w_2, w_3) = (1, x, x^2 - 1/3)$. La meilleure approximation quadratique de $f(x) = |x|$ par un élément de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est $\text{proj}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} f$.

$$\text{proj}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} f = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 + \frac{\langle f, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x + \frac{\langle f, x^2 - 1/3 \rangle}{\langle x^2 - 1/3, x^2 - 1/3 \rangle} (x^2 - 1/3).$$

$$\langle f, 1 \rangle = \int_{-1}^1 |x| dx = 2 \int_0^1 x dx = 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = 1.$$

$$\langle f, x \rangle = \int_{-1}^1 |x| \cdot x dx = \int_{-1}^0 -x^2 dx + \int_0^1 x^2 dx = 0.$$

$$\langle f, x^2 - 1/3 \rangle = \int_{-1}^1 |x| (x^2 - 1/3) dx = 2 \int_0^1 x(x^2 - 1/3) dx = 1/6$$

$$\langle x^2 - 1/3, x^2 - 1/3 \rangle = \int_{-1}^1 (x^2 - 1/3)^2 dx =$$

9.11 La meilleure approximation quadratique: exemple



Ensuite, si je fais 1 avec lui-même, je crois qu'on a déjà fait ça, c'était 2. Ensuite, f avec x , c'est l'intégrale de -1 à 1 , de la valeur absolue de x fois x , dx , ça c'est la même chose que l'intégrale de -1 à 0 de $-x^2 dx$ parce que sur cette intervalle là, la valeur absolue c'est $-x$ et puis l'intégrale de 0 à 1 de $x^2 dx$ et puis ça donnerait 0 . Et ensuite, j'ai f , le produit scalaire avec $x^2 - 1/3$. Et puis ça c'est l'intégrale de -1 à 1 , de la valeur absolue de x , $x^2 - 1/3$. Maintenant ça c'est une fonction qui est paire donc c'est 2 fois l'intégrale de 0 à 1 , $x \cdot (x^2 - 1/3)$. Et puis bon je vous laisse faire ce calcul, ça donne $1/6$. Et puis la norme de $x^2 - 1/3$ ou la norme au carré de $x^2 - 1/3$ c'est l'intégrale de -1 à 1 de $x^2 - 1/3$ le tout au carré et de nouveau je vous laisse faire le calcul. Ça à la fin on trouve $8/45$.

Notes

Summary



7m 06s

Une base orthogonale de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est $(w_1, w_2, w_3) = (1, x, x^2 - 1/3)$. La meilleure approximation quadratique de $f(x) = |x|$ par un élément de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est $\text{proj}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} f$.

$$\text{proj}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} f = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 + \frac{\langle f, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x + \frac{\langle f, x^2 - 1/3 \rangle}{\langle x^2 - 1/3, x^2 - 1/3 \rangle} (x^2 - 1/3).$$

$$\langle f, 1 \rangle = \int_{-1}^1 |x| dx = 2 \int_0^1 x dx = 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = 1.$$

$$\langle f, x \rangle = \int_{-1}^1 |x| \cdot x dx = \int_{-1}^0 -x^2 dx + \int_0^1 x^2 dx = 0.$$

$$\langle f, x^2 - 1/3 \rangle = \int_{-1}^1 |x| (x^2 - 1/3) dx = 2 \int_0^1 x(x^2 - 1/3) dx = 1/6$$

$$\langle x^2 - 1/3, x^2 - 1/3 \rangle = \int_{-1}^1 (x^2 - 1/3)^2 dx = 8/45.$$

$$\text{proj}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} f = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1/6}{8/45} (x^2 - 1/3) = \frac{3}{16} (5x^2 + 1)$$



9.11 La meilleure approximation quadratique: exemple

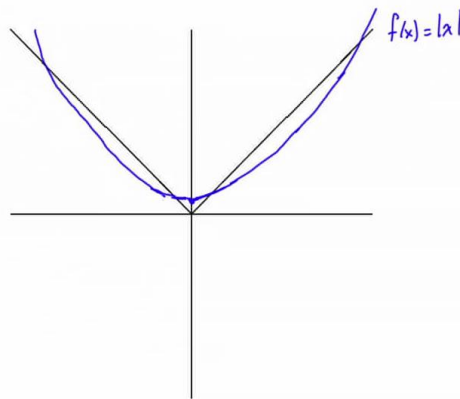
Et donc la projection sur l'espace des polynômes de degré au plus 2 de la fonction, la valeur absolue est égale à donc ici j'ai 1/2 qui multiplie 1 j'ai 0 qui multiplie x et ensuite j'ai 1/6 sur 8/45 qui multiplie $x^2 - 1/3$ et puis je simplifie tout ça et j'ai 3/16 qui multiplie $5x^2 + 1$. Maintenant j'aimerais faire un dessin pour vous montrer à quel point c'est une bonne approximation.

Notes

Summary



8m 44s



$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} f &= \frac{3}{16} (5x^2 + 1) \\ &= \frac{15}{16} x^2 + \frac{3}{16} \end{aligned}$$

9.11 La meilleure approximation quadratique: exemple



Donc ça c'est la fonction f qui est la valeur absolue et puis la projection sur l'espace des polynômes de degré au plus 2 de cette valeur absolue c'était $\frac{3}{16} 5x^2 + 1$ donc c'est $\frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}$ Donc tout d'abord on voit que si on pose $x=0$ ça coupe l'axe des y ici à $\frac{3}{16}$ donc très près. Là. Et puis ensuite on peut calculer les intersections avec la valeur absolue et puis ce qui se passe c'est que c'est un peu plat ici au début et après ça revient. Et puis la même chose ici à gauche. Là je vais juste esquisser. En fait, c'est une bonne approximation essentiellement sur l'intervalle $[-1, 1]$ parce que cette intégrale où le produit scalaire c'est quelque chose de basé sur le comportement des deux fonctions que sur l'intervalle $[-1, 1]$. Mais bon on voit quand même que c'est une assez bonne approximation ici. Donc par exemple si on pose $x=1$ dans cette fonction on a le point $(1, 1)$ et $x=-1$ on a $(-1, -1)$. Et si on pose $x=1$ ici dans cette formule, on a $\frac{18}{16}$ qui est aussi assez près de 1 donc c'est une bonne approximation. Donc j'aime bien cet exemple, parce que c'est une exemple dans un espace de fonctions et puis on voit qu'on a approximé la valeur absolue par une fonction polynômiale, une bonne approximation.

Notes

Summary

