

[illegible]



Full Text Available at
<https://doi.org/10.1155/2022/1029342>

Summary



Théorème. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes (vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^m$). Alors il existe une factorisation $A = QR$ où $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et ses colonnes forment une base orthonormée de l'espace des colonnes de A (par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^m$) et $R \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux strictement positifs.



9.13 La factorisation QR



Donc le théorème est le suivant : je me donne une matrice $m \times n$ à coefficient réel et je suppose que les colonnes sont linéairement indépendantes. Donc, je regarde les colonnes qui sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^m$ et je pose l'hypothèse que ces colonnes sont linéairement indépendantes. Alors il existe une factorisation de cette matrice de la forme suivante : Ça s'appelle la factorisation QR . Q est une matrice de la même taille que A , donc $m \times n$. Et puis, ces colonnes sont aussi linéairement indépendantes et ça forme une base orthonormée de l'espace des colonnes de A par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^m$. R est une matrice triangulaire supérieure et de plus, ses coefficients diagonaux sont strictement positifs. Donc, en particulier, R est une matrice inversible. Maintenant, avant de commencer la preuve, je veux juste remarquer une chose ici. Donc, c'est quand même une hypothèse ici de supposer que les colonnes de cette matrice sont linéairement indépendantes. C'est pas donné comme vous savez bien, mais c'est une hypothèse qu'on pose ici. Et puis, ça implique quelque chose sur m et n ici.

Notes

Summary



0m 21s

Théorème. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes (vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^m$). Alors il existe une factorisation $A = QR$ où $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et ses colonnes forment une base orthonormée de l'espace des colonnes de A (par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^m$) et $R \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux strictement positifs.

(Comme les n colonnes sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^m$, on sait que $m \geq n$.)

Preuve Soient $c_1, \dots, c_n$ les colonnes de A (vues comme vecteurs dans $\mathbb{R}^m$)
 Posons $W = \text{Vect}(c_1, \dots, c_n) \subset \mathbb{R}^m$. Comme $c_1, \dots, c_n$ sont linéairement in

9.13 La factorisation QR



Donc, je vais juste faire une remarque. Comme les colonnes, il y en a n colonnes. Comme les n colonnes sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^m$. On sait que m est plus grand/égal à n . Parce que l'on a n vecteur linéairement indépendant, la dimension de l'espace est m . Donc, n ne peut pas dépasser m . Ça, c'est juste une remarque ici. On a déjà une hypothèse ici, cette matrice, elle a au moins le même nombre de lignes que de colonnes. Donc, elle ne peut pas avoir moins de lignes que de colonnes. Maintenant, j'ai envie de démontrer ce théorème comme c'est encore une jolie application de l'algorithme de Gram-Schmidt dont voilà la preuve qui est un petit peu compliquée, qui utilise plein de théories. Donc, je fixe une notation qui est soit C_1 jusqu'à C_n des colonnes de A . Et je dis : vues comme vecteurs dans $\mathbb{R}^m$. Alors je pose W de sous-espace vectoriel engendré par ces colonnes. Donc, c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$. Et puis, comme C_1 jusqu'à C_n sont linéairement indépendants, je sais que ces colonnes forment une base. Par hypothèse, B_C formé de ces vecteurs-là est une base de W .

Notes

Summary



1m 26s

Théorème. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes (vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^m$). Alors il existe une factorisation $A = QR$ où $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et ses colonnes forment une base orthonormée de l'espace des colonnes de A (par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^m$) et $R \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux strictement positifs.

(Comme les n colonnes sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^m$, on sait que $m \geq n$.)

Preuve Soient $c_1, \dots, c_n$ les colonnes de A (vues comme vecteurs dans $\mathbb{R}^m$)

Posons $W = \text{Vect}(c_1, \dots, c_n) \subset \mathbb{R}^m$. Comme $c_1, \dots, c_n$ sont linéairement indépendants, $B_c = (c_1, \dots, c_n)$ est une base de W . Soit $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire donnée par $\varphi(w) = w, \forall w \in W$. (c'est l'inclusion de W dans $\mathbb{R}^m$).

$$[\varphi]_{B_c} = A,$$

où C est la base canonique de $\mathbb{R}^m$

9.13 La factorisation QR



Maintenant, je pose une application linéaire : Φ de W dans $\mathbb{R}^m$. L'application linéaire, qui fait rien en fait, donnée par Φ appliquée à W , c'est tout simplement W . Ça a un sens parce que W , c'est un vecteur dans $\mathbb{R}^m$. Donc, c'est juste l'inclusion de W dans $\mathbb{R}^m$. Et ici, je rajoute : pour tout w dans W . Et puis maintenant, ayant fixé comme ça, si je pose la matrice de Φ par rapport à la base B_c et la base C , qui est la base canonique de $\mathbb{R}^m$, et je pose la matrice de Φ . C'est exactement la matrice A . Et pourquoi ? On réfléchit. Parce que pour former cette matrice, je dois prendre le premier vecteur de la base, qui est le vecteur C_1 . Je l'écris par rapport à la base canonique mais elle est déjà écrite par rapport à la base canonique quand je regarde la colonne et, je repose la matrice A . Donc, ça, c'est ce que je veux utiliser ici. Cette matrice-là, elle représente cette application linéaire. J'aime bien penser qu'une matrice représente une application linéaire. Maintenant, je reprends, je continue.

Notes

Summary



3m 42s

Utilisons la procédure de Gram-Schmidt pour transformer B_c en une base orthonormée de W .

$$B_c = (c_1, \dots, c_n) \xrightarrow{\text{G-S}} B_o = (w_1, \dots, w_n).$$

Rappel: $w_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|}$

$$w_2 = \frac{c_2 - (c_2, w_1) w_1}{\| \cdot \|}$$

9.13 La factorisation QR



Alors maintenant, je vais utiliser la procédure de Gram-Schmidt pour transformer la base B_c en une base orthonormée de W . Donc, je vais vraiment jusqu'au bout. Orthonormée, pas seulement orthogonale mais vraiment une base orthonormée. Donc, j'ai B_c qui est c_1 jusqu'à c_n et puis, je vais utiliser Gram-Schmidt. Et j'obtiens ce que j'appelle B_o pour orthonormée, une base w_1 jusqu'à w_n . Donc maintenant, ce qui est important, c'est de se rappeler de la procédure. Donc le w_1 , normalement, si on veut juste une base orthogonale, on prend w_1 égal c_1 . Mais comme on veut une base orthonormée, w_1 c'est le premier vecteur divisé par sa norme. Donc ça, c'est w_1 . Et puis maintenant, le w_2 . C'est où je prends le deuxième vecteur de la base originale. Ensuite, je soustrais sa projection sur le premier. Donc, je fais $c_2 - (c_2, w_1) w_1$ divisé par la norme qui multiplie w_1 . Et puis après, je dois diviser par la norme de ça. Divisé par/ou quelque chose qui a la norme de ce qu'on a là. Je vais pas écrire, parce que c'est juste un petit rappel. Et après je dis etc.

Notes

Summary



5m 27s

Utilisons la procédure de Gram-Schmidt pour transformer B_c en une base orthogonale de W .

$$B_c = (c_1, \dots, c_n) \xrightarrow{\text{G-S}} B_o = (w_1, \dots, w_n).$$

Rappel: $w_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|}$

$$c_1 = \|c_1\| w_1$$

$$c_2 = \| \cdot \| \cdot w_2 + (c_2 \cdot w_1) w_1$$

$$w_2 = \frac{c_2 - (c_2 \cdot w_1) w_1}{\| \cdot \|}$$

etc.

etc.

En général, $c_k = r_{1k} w_1 + r_{2k} w_2 + \dots + \underbrace{r_{kk}} w_k$



9.13 La factorisation QR

Ce que je vais vous faire remarquer ici, ce que maintenant, si je vais réécrire les C (inaudible) w , j'aurais ici que c_1 est égal à la norme de $c_1 \times w_1$. Et ici, j'aurais que c_2 est égal à cette norme-là, qui multiplie w_2 , plus un coefficient qui multiplie w_1 . J'ai pas besoin de savoir exactement ce que c'est, mais c'est une norme ici. C'est une norme de vecteur non nul. Donc, ça c'est un coefficient non nul, ça c'est un coefficient non nul. Je dis aussi etc. Et puis, ici, en général, si je continue comme ça, ce qu'on trouve, c'est que les c qu'on avait original, les c des vecteurs originaux : C_k . On sait qu'on peut l'exprimer en terme de w . Et puis, on peut l'exprimer en termes de w si c'est C_k c'est jusqu'à W_k . Je dis, c'est $r_{1k} w_1 + r_{2k} w_2$ jusqu'à $r_{kk} w_k$. Et ensuite, les autres coefficients sont nuls. On a que besoin d'utiliser ceux qui précédaient. Et puis, ce qui est important, ce que je voulais souligner ici, c'est que le coefficient ici, c'est une valeur qui est positive. Vous voyez ici que le c_1 , le coefficient de w_1 , c'est cette norme.

Notes

Summary



Utilisons la procédure de Gram-Schmidt pour transformer B_c en une base orthogonale de W .

$$B_c = (c_1, \dots, c_n) \xrightarrow{\text{G-S}} B_o = (w_1, \dots, w_n).$$

Rappel: $w_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|}$

$$c_1 = \|c_1\| w_1$$

$$c_2 = \|c_2\| w_2 + (c_2, w_1) w_1$$

$$w_2 = \frac{c_2 - (c_2, w_1) w_1}{\|c_2 - (c_2, w_1) w_1\|}$$

etc.

etc.

En général, $c_k = r_{1k} w_1 + r_{2k} w_2 + \dots + r_{kk} w_k$ $r_{kk} > 0$.

Posons $R =$ la matrice de passage $[id]_{B_o B_c} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $Q = [\varphi]_{c B_o}$

9.13 La factorisation QR



Donc le C_2 , le coefficient de W_2 c'est cette norme-là, etc. C'est toujours le norme de vecteur non nul Donc R_{kk} est strictement positif. Donc, maintenant je suis prête pour poser mes deux matrices Q et R . Donc, posons deux choses ici : Je pose R égal à la matrice de passage. L'identité de B_c vers B_o . On a ce qu'il faut ici maintenant pour imaginer cette matrice. Donc, j'écris C_1 en termes de de la base des w . Donc ici, j'ai R_{11} et des 0. Après, je pose C_2 en direction de la base B_o et j'ai : R_{12} , R_{22} , et ensuite des 0, etc. Après, R_{13} , R_{23} , R_{33} , et ensuite des 0, etc. Ici, à la fin, j'ai pour cible n , R_{nn} ici en bas, etc. Donc, ça c'est une matrice triangulaire supérieure et les coefficients le long de la diagonale sont strictement positifs. Donc, ça c'est R . Si on relit ce que disait le théorème, c'est exactement ça : R est une matrice, $n \times n$: triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs. Et puis, posons Q égal la matrice de notre application linéaire mais cette fois, écrit par rapport à B_o , c . Je vais reprendre ça dans le prochain slide.

Notes

Summary



$$R = [\text{id}]_{B_c B_c}, \quad Q = [\varphi]_{C B_c}, \quad A = [\varphi]_{C B_c}$$

R triangulaire supérieure, $n \times n$, inversible, avec coefficients diagonaux strictement positifs.

$Q = [\varphi]_{C B_c}$. Colonnes de Q : $\varphi(w_i) = w_i$. La i -ème colonne de Q est égale à $[w_i]_c$



9.13 La factorisation QR



Donc j'ai R qui est égal à la matrice de passage, de la base B_c , de la base orthonormée. Et puis Q , c'est la matrice de Φ par rapport à $C B_c$. Et puis, je rappelle aussi que notre matrice A était la matrice de Φ par rapport à cette base B_c et la base canonique. Et puis maintenant, je remarque de nouveau que R est bien triangulaire supérieur, $n \times n$ inversible, car c'est une matrice de passage, avec coefficients diagonaux strictement positifs. Q , c'est la matrice de Φ par rapport à la base $C B_c$. Et maintenant, je devrais regarder les colonnes de Q . Alors je prends Φ , je l'applique à un vecteur de la base orthonormée. C'est la base w_1 jusqu'à w_n . Φ , c'est juste l'application qui fait l'inclusion. Donc ça, c'est w_i . Et puis, la i -ème colonne, je la représente par rapport à c . Donc, la i -ème colonne de Q est égale à ce vecteur w_i , représenté par rapport à la base c . Et puis, on sait que la base B_c , est effectivement, par choix, une base orthonormée de w qui est égale à l'espace colonnes de la matrice A .

Notes

Summary



10m 28s

$$R = [id]_{B_0 B_c}, \quad Q = [\varphi]_{c B_0}, \quad A = [\varphi]_{c B_c}$$

R triangulaire supérieure, $n \times n$, inversible, avec coefficients diagonaux strictement positifs.

$Q = [\varphi]_{c B_0}$. Colonnes de Q : $\varphi(w_i) = w_i$. La i -ème colonne de Q

est égale à $[w_i]_c$. $B_0 = (w_1, \dots, w_n)$ est une base orthonormée de $W = \text{l'espace}$
colonnes de A .

$$QR = [\varphi]_{c B_0} [id]_{B_0 B_c} = [\varphi \circ id]_{c B_c} = [\varphi]_{c B_c} = A.$$

9.13 La factorisation QR



Notes

Et donc, Q a exactement la propriété qu'on voulait. C'était que ses colonnes forment une base orthonormée de l'espace colonnes de A . Et puis, enfin, je regarde ce que c'est $Q \times R$, ça, c'est égal à Φ par rapport aux bases B_0 et c . L'identité R qui est la matrice de passage B_0, B_c . Et puis, après, on utilise dans notre théorie de matrice de passage ou de composition ou d'application, ça, c'est Φ , composé avec une identité. Après, ici, je fais le passage, donc j'ai ici c et là j'ai B_c . Donc ça, c'est la matrice de Φ par rapport à la base c et B_c . Ça, c'est exactement la matrice A . On a cette factorisation de notre matrice A . Ici, Q c'est une matrice de la même taille que A mais dont les colonnes forment une base orthonormée, de l'espace des colonnes de A . Et R est une matrice triangulaire supérieure inversible dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. Maintenant, faisons un exemple de cette factorisation.

Summary



12m 45s

Exemple. Trouver une factorisation ^{QR} de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Algorithme.

$$\mathcal{B}_c = ((5, 1, -3, 1), (9, 7, -5, 5)) = (c_1, c_2),$$

$\mathcal{B}_0 = (w_1, w_2)$ = base orthonormée via Gram-Schmidt,

$$Q = [w_1 \mid w_2], \quad = [\varphi]_{\mathcal{C}\mathcal{B}_0}$$

$$R = [\text{id}]_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}_c}$$

9.13 La factorisation QR



Donc voilà, je me donne une matrice A et je souhaite trouver la factorisation QR de la matrice A . Dans l'algorithme, on a posé la base $\mathcal{B}_c$ qui est la base ici. On voit bien qu'effectivement c'est une matrice. Qu'est ce que j'avais dit ? J'avais dit que le nombre de lignes, qui est quatre, c'est au moins égal au nombre de colonnes. Ici, c'est deux. Et puis, on remarque que ces deux colonnes sont linéairement indépendantes. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Donc, on peut appliquer cet algorithme. Alors, j'ai posé $\mathcal{B}_c$. C'est la base donnée de l'espace des colonnes, de A . Et ensuite, je dois aller chercher une base orthonormée. Je vais faire ça par la suite. Ensuite le Q . C'est où j'écris tout simplement la matrice, la base orthonormée w_1 et w_2 que je vais retrouver dans les colonnes. Et puis, le Q je vous rappelle ici, c'était la matrice de Φ qui était juste l'inclusion $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}$. Donc, la colonne c'est juste on écrit le vecteur dans la base orthonormée par rapport à la base $\mathcal{C}$. Ça, je rappelle. Donc, on écrit : w_1, w_2 en termes de la base canonique.

Notes

Summary



13m 59s

Exemple. Trouver une factorisation ^{QR} de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Algorithme.

$$B_c = ((5, 1, -3, 1), (9, 7, -5, 5)) = (c_1, c_2),$$

→ $B_0 = (w_1, w_2)$ = base orthonormée via Gram-Schmidt,

$$Q = [w_1 \mid w_2], \quad = [\varphi]_{B_0} \quad \text{on écrit } w_1, w_2 \text{ en termes de la base canonique.}$$

$$R = [\text{id}]_{B_0 B_c}$$

$$\text{D'abord on construit } B_0 : \quad w_1 = \frac{(5, 1, -3, 1)}{\|(5, 1, -3, 1)\|} = \frac{1}{6}(5, 1, -3, 1)$$

$$w_2 = ? \quad (9, 7, -5, 5) - \frac{1}{6}(45 + 7 + 15 + 5) \cdot \frac{1}{6}(5, 1, -3, 1)$$

9.13 La factorisation QR



Donc, pas cette base B_c mais en termes de la base canonique. Et puis ensuite, le R c'est la matrice de passage entre cette base-là et cette base-là mais dans ce sens-là. Donc maintenant, on fait la construction. Je dois d'abord faire cette étape-là. D'abord on construit B_0 . Alors w_1 , c'est le C_1 divisé par la norme de ce vecteur. Donc, la norme de ce vecteur : j'ai $25 + 1 = 26$, $+ 9 + 1 = 36$, racine carrée. Donc j'ai 1 sur $6 \times (5, 1, -3, 1)$. Donc ça c'est w_1 . Maintenant, pour le w_2 , je vais faire en deux étapes. D'abord, avant de normaliser, je cherche un vecteur qui ne sera pas de norme 1 mais quand même orthogonal à w_1 . Donc, je prends le deuxième vecteur de la base $(9, 7, -5, 5)$. Je soustrais sa projection sur ce vecteur-là. Je dois d'abord faire le produit scalaire de ces deux vecteurs. Donc, j'ai 1 sur 6 . Ensuite, j'ai ici $(45 + 7 + 15 + 5)$. Ça, c'est les produits scalaires C_2 . Ensuite, je dois diviser par la norme de ce vecteur-là mais c'est un vecteur de norme 1 . Ensuite, je dois multiplier par ce vecteur. 1 sur 6 de $(5, 1, -3, 1)$. C'est vraiment la projection de ce vecteur-là sur w_1 . Donc, je simplifie un petit peu ici.

Notes

Summary



15m 37s

Exemple. Trouver une factorisation ^{QR} de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Algorithme.

$$B_c = ((5, 1, -3, 1), (9, 7, -5, 5)) = (c_1, c_2),$$

→ $B_0 = (w_1, w_2) =$ base orthonormée via Gram-Schmidt,

$$Q = [w_1 \mid w_2], = [\varphi]_{c B_0} \quad \text{on écrit } w_1, w_2 \text{ en termes de la base canonique.}$$

$$R = [\text{id}]_{B_0 B_c}$$

D'abord on construit B_0 : $w_1 = \frac{(5, 1, -3, 1)}{\|(5, 1, -3, 1)\|} = \frac{1}{6}(5, 1, -3, 1)$

$$w_2 = ? \quad (9, 7, -5, 5) - \frac{1}{6}(45 + 7 + 15 + 5) \cdot \frac{1}{6}(5, 1, -3, 1) = (9, 7, -5, 5) - \frac{72}{36}(5, 1, -3, 1) = (-1, 5, 1, 3)$$

$$w_2 = \frac{(-1, 5, 1, 3)}{6} = \frac{1}{6}(-1, 5, 1, 3). \quad \text{Donc } Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

9.13 La factorisation QR



J'ai : $(9, 7, -5, 5)$ moins 72 sur 36 de $(5, 1, -3, 1)$. Donc, ça c'est un 2 ici. Donc j'ai $9 - 10 = -1$. J'ai $7 - 2 = 5$. $-5 + 6 = 1$ Et puis, $5 - 2 = 3$. Donc, ça c'est pas w_2 mais un vecteur orthogonal à w_1 . Maintenant, je veux normaliser. Je peux contrôler que c'est orthogonal. J'ai : $-5 + 5$; $-3 + 3$. Et puis, w_2 est égal à ce vecteur-là : $(-1, 5, 1, 3)$ divisé par sa norme. Sa norme c'est 36 racine carrée, donc c'est 6 . Donc 1 sur 6 de $(-1, 5, 1, 3)$. Et puis maintenant, je suis prête pour la partie Q ici. Donc Q c'est tout simplement ce vecteur-là écrit par rapport à la base canonique. Les deux sont multipliés par 1 sur 6 . Donc, je peux mettre ça devant. J'ai 1 sur 6 . Puis, j'écris la colonne $(5, 1, -3, 1)$ et $(-1, 5, 1, 3)$. Donc, les deux colonnes de cette matrice forment une base orthonormée de l'espace des colonnes. Donc, ça c'est le Q Maintenant le R , je dois écrire la base originale en termes de cette base.

Notes

Summary



17m 26s

Rappel. On a $\mathcal{B}_c = (c_1, c_2) = ((5, 1, -3, 1), (9, 7, -5, 5))$,

$\mathcal{B}_0 = (w_1, w_2) = ((5/6, 1/6, -3/6, 1/6), (-1/6, 5/6, 1/6, 3/6))$ et

$$Q = [w_1 \mid w_2] = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$R = [id]_{\mathcal{B}_0 \mathcal{B}_c}$$

$$w_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{c_1}{6} \Rightarrow c_1 = 6w_1$$

$$w_2 = \frac{c_2 - (c_2 \cdot w_1)w_1}{6} \Rightarrow 6w_2 = c_2 - (c_2 \cdot w_1)w_1 = c_2 - 12w_1$$



9.13 La factorisation QR



Ici, je rappelle que j'ai la base originale, la nouvelle base et puis, j'ai déjà posé le Q . Maintenant, pour faire la matrice c'est pas si difficile parce que je reprends les équations que j'avais avant. J'avais w_1 est égal à c_1 divisé par la norme de c_1 . Donc, c_1 divisé par 6. c_1 est égal à 6 fois w_1 . Pour R ici, je devrais rappeler. R est censé être la matrice de passage entre $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}_0$. Donc là, j'ai déjà écrit c_1 en termes de w_1 . Et le w_2 c'était c_2 moins le produit scalaire, c_2 avec w_1 qui multiplie w_1 . Et après, on a divisé par la norme de ce vecteur à la norme de ce vecteur. Le vecteur, c'était 6. Donc après, on a que $6w_2$ est égal à c_2 moins le produit scalaire 2 avec w_1 qui multiplie w_1 . Et puis, si vous faites le produit scalaire de c_2 avec w_1 , vous pouvez regarder en arrière, ce n'est pas le 2 qu'on a trouvé avant. Aussi, si on avait pas w_1 mais on avait encore un sixième là, ici on trouve que c'est $c_2 - 12w_1$. Et donc, du coup, le c_2 est égal à $6w_2 + 12w_1$.

Notes

Summary



19m 07s

Rappel. On a $\mathcal{B}_c = (c_1, c_2) = ((5, 1, -3, 1), (9, 7, -5, 5))$,

$\mathcal{B}_0 = (w_1, w_2) = ((5/6, 1/6, -3/6, 1/6), (-1/6, 5/6, 1/6, 3/6))$ et

$$Q = [w_1 \mid w_2] = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$R = [id]_{\mathcal{B}_0 \mathcal{B}_c}$$

$$w_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{c_1}{6} \Rightarrow c_1 = 6w_1$$

$$w_2 = \frac{c_2 - (c_2 \cdot w_1)w_1}{6} \Rightarrow 6w_2 = c_2 - (c_2 \cdot w_1)w_1 = c_2 - 12w_1$$

$$c_2 = 6w_2 + 12w_1$$

$$R = [id]_{\mathcal{B}_0 \mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$QR = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

9.13 La factorisation QR



Et puis, donc le R est censé être la matrice de passage justement. $L'identité_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_0}$. Et puis, j'ai créé la base c en terme de la base orthogonale $\mathcal{B}_0$. Donc, le $C1$ est égal à : $6 \times W1, 0 \times W2$. Et $C2$ est égal à : $12 \times W1, 6 \times W2$. Donc, c'est bien une matrice supérieure, coefficients diagonaux strictement positifs. Et puis maintenant, j'aimerais juste faire la vérification. Je fais : $Q \times R$, j'ai un 1 sur 6 de cette matrice. Je multiplie à droite par cette matrice. Ce 1 sur 6, je peux l'incorporer ici. Je saute un petit peu. Qui multiplie la matrice en 2×2 . Et puis maintenant, je fais le produit. J'ai $5 + 0$. Après, $10 - 2$. Ici, c'est pas un 2 mais un 1, excusez-moi. Sinon ça va pas jouer. Donc, j'incorpore le 1 sur 6 ici, ça me donne 1 là. C'est juste. Maintenant j'ai : $5 + 0 = 5$; $10 - 1 = 9$. Ensuite, j'ai : $1 + 0 = 1$; $2 + 5 = 7$. Ensuite : $-3 + 0 = -3$; $-6 + 1 = -5$. De toute façon, ici à droite J'ai la colonne de $l'identité$ donc je récupère la première colonne ici. Ensuite : $2 + 3 = 5$. Et ça, c'est exactement la matrice A . Donc voilà, ça c'est un exemple complet de la factorisation QR. Et dans la dernière vidéo de ce chapitre, nous verrons une application de ça.

Notes

Summary



20m 44s