



Dans cette dernière vidéo du chapitre 9, nous allons voir une application de la factorisation QR que nous venons de voir à la résolution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés.

[illegible]

A square QR code located at the bottom left of the page, likely linking to the summary page.



Proposition. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes et soit $A = QR$ une factorisation QR de A , comme décrite dans §9.13. Alors pour tout $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = b$ admet une unique solution au sens des moindres carrés, donnée par la formule :

$$\hat{X} = R^{-1}Q^T b.$$

9.14 Factorisation QR - application à la résolution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés



Voilà la proposition. Comme je veux utiliser la factorisation QR , je commence avec une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes, vues comme des vecteurs dans $\mathbb{R}^m$. Et puis, je fixe une factorisation QR , je sais que je peux trouver comme décrite dans la vidéo précédente, alors pour tout b dans les matrices $m \times 1$ à coefficient réel, l'équation $AX = b$ admet une solution unique au sens des moindres carrés donnée par cette formule-là : $\hat{X} = R^{-1}Q^T b$. Donc on n'a pas besoin de chercher, dès le moment où on a une factorisation QR , on peut résoudre plein de systèmes d'équations liées à A au sens des moindres carrés. Bon, on se rappelle que si le système original admet une vraie solution, alors la solution au sens des moindres carrés donne cette vraie solution. Mais ici, on est dans un contexte où on imagine qu'il faut chercher une solution au sens des moindres carrés. Et puis, ça serait donné par ça. Maintenant, pour montrer cette proposition, d'abord je commence avec un M ou une proposition indépendante. Donc je fais ça en premier. Donc après, je vais rappeler la formule que nous souhaitons montrer.

Notes

Summary



0m 16s

Proposition Soit $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée de l'espace des colonnes de Q . Alors $QQ^T \cdot b = \text{proj}_W b$ où $W =$ l'espace colonnes de $Q \subset \mathbb{R}^m$ pour tout $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$.

Preuve On note d'abord que $Q^T Q = I$
 $(c_1 | c_2 \dots | c_n)$



9.14 Factorisation QR - application à la résolution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés



Donc d'abord une proposition autre, c'est que je me donne une matrice Q $m \times n$ à coefficient réel. Une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée de l'espace des colonnes de Q . C'est exactement la situation qu'on a quand on a fait une factorisation QR d'une matrice A . Alors, le constat, c'est que si je multiplie Q fois Q^T , qui me donnerait une matrice carrée, alors qui multiplie un vecteur b , ça, c'est exactement la projection de ce vecteur b sur W où W est l'espace des colonnes de Q comme un sous-espace de $\mathbb{R}^m$, donc pour tout b vecteur dans $m \times 1(\mathbb{R})$. OK, preuve. D'abord, je veux juste remarquer une première chose, c'est que cette matrice Q , elle a la propriété suivante : On note d'abord, et ça, c'est un thème que nous aborderons plus généralement dans le chapitre 10. On note d'abord que la matrice $Q^T Q$, pas $Q Q^T$ mais $Q^T Q$, est égale à la matrice identité. Et la raison est la suivante : C'est que Q est une matrice comme ça. Donc disons $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ colonnes. Et puis ces colonnes forment une base orthonormée.

Notes

Summary



1m 30s

Proposition Soit $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée de l'espace des colonnes de Q . Alors $QQ^T \cdot b = \text{proj}_W b$ où $W =$ l'espace colonnes de $Q \subset \mathbb{R}^m$ pour tout $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$.

Preuve On note d'abord que $Q^T Q = I$
 $(c_1 | c_2 \dots | c_n) \quad (c_1, \dots, c_n)$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$
 $Q^T Q = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (c_1 | c_2 \dots | c_n) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot c_1 & c_1 \cdot c_2 & \dots \\ & c_2 \cdot c_2 & \dots \\ & & \ddots \end{pmatrix}$
 $(Q^T Q)_{ij} = c_i \cdot c_j$

9.14 Factorisation QR - application à la résolution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés



Donc $c_1, \dots, c_n$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Et puis maintenant, si je regarde la matrice $Q^T Q$, alors je tourne ça. Donc cette première colonne, elle devient une ligne. Donc j'ai la ligne un, la ligne deux, la ligne n . Et ensuite, je multiplie par la matrice Q . Donc la colonne un, la colonne deux, la colonne n . Et ensuite, quand je veux former le produit de ces deux matrices, il faut imaginer comment ça se passe. Pour trouver la composante ici, je vais faire le produit de cette première ligne fois cette première colonne, ça, c'est exactement le produit scalaire. Donc ici, j'aurai c_1 produit scalaire avec c_1 . Comme c'est une base orthonormée, ça serait égal à un. Quand je fais la deuxième composante de cette première ligne, j'aurais cette ligne qui multiplie cette deuxième colonne donc j'aurais le produit scalaire de c_1 produit scalaire c_2 , qui donnerait zéro parce que c'est une base orthonormée, etc. Donc $(Q^T Q)$, le coefficient ij , c'est exactement le produit scalaire de c_i avec c_j . Et on sait que ceci est égal à un si i est égal à j et c'est zéro si i est différent de j .

Notes

Summary



3m 33s

Proposition Soit $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée de l'espace des colonnes de Q . Alors $QQ^T \cdot b = \text{proj}_W b$ où $W =$ l'espace colonnes de $Q \subset \mathbb{R}^n$ pour tout $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

Preuve On note d'abord que $Q^T Q = I$
 $(c_1 | c_2 \dots | c_n) \quad (c_1, \dots, c_n)$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$
 $Q^T Q = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (c_1 | c_2 \dots | c_n) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot c_1 & c_1 \cdot c_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$
 $(Q^T Q)_{ij} = c_i \cdot c_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Il suffit de montrer que $b - QQ^T b \in W^\perp$. Soit $w \in W$, donc $w = Qx$, $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
 $w \cdot (b - QQ^T b) = (Qx) \cdot (b - QQ^T b) =$

9.14 Factorisation QR - application à la résolution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés



Donc ça donne exactement la matrice identité. Maintenant, c'est ça qui compte. Donc pour la preuve que ça c'est la projection, il suffit de montrer que si je fais la différence $b - QQ^T b$, que ça, c'est dans l'orthogonale à W . Et la raison c'est parce qu'on sait qu'on peut écrire b de façon unique comme un vecteur dans le complément orthogonal à W plus un vecteur dans W . Et puis, ce vecteur-là est dans le complément orthogonal et comme on sait que ce vecteur-là est dans W , parce que c'est Q fois quelque chose donc c'est dans W , alors ceci sera la projection par l'unicité de l'expression. Donc il suffit de montrer ça. Donc maintenant, soit un w dans W . Comme W est l'espace colonne de Q donc c'est l'image d'une application linéaire donc $w = Qx$, pour x un vecteur colonne $n \times 1(\mathbb{R})$. Donc maintenant, pour vous convaincre que ce vecteur-là est dans l'orthogonale à W , je dois faire le produit scalaire de lui et w et que j'obtiens zéro. Donc je fais w produit scalaire de $b - QQ^T b$, qui est égal à $(Qx) \cdot (b - QQ^T b)$. Maintenant, ça c'est un vecteur colonne.

Notes

Summary



4m 58s

Proposition Soit $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée de l'espace des colonnes de Q . Alors $QQ^T \cdot b = \text{proj}_W b$ où $W =$ l'espace colonnes de $Q \subset \mathbb{R}^n$ pour tout $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

Preuve On note d'abord que $Q^T Q = I$

$$\left(c_1 | c_2 \dots | c_n \right) \quad (c_1, \dots, c_n) \text{ base orthonormée de } \mathbb{R}^n$$

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 | c_2 \dots | c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^T c_1 & c_1^T c_2 & \dots \\ c_2^T c_1 & c_2^T c_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$(Q^T Q)_{ij} = c_i^T c_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Il suffit de montrer que $b - QQ^T b \in W^\perp$. Soit $w \in W$, donc $w = Qx$, $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
 $w \cdot (b - QQ^T b) = (Qx)^T (b - QQ^T b) = (Qx)^T b - (Qx)^T QQ^T b = x^T Q^T b - x^T Q^T QQ^T b = x^T Q^T b - x^T Q^T b = 0$.
 $\Rightarrow b - QQ^T b \in W^\perp$. Par l'unicité de la projection orthogonale on a $QQ^T b = \text{proj}_W b$. $\square$

9.14 Factorisation QR - application à la résolution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés



Quand je veux faire le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^m$, alors je peux voir ça comme je fais $Q^T x^T$. Maintenant, je l'ai tourné en un vecteur ligne qui multiplie le vecteur colonne $b - QQ^T b$. Donc ça, c'est maintenant une multiplication matricielle. Ici, la transposée d'un produit, c'est le produit des transposées mais dans l'autre sens. Et puis maintenant, je vais développer, donc fois $b - QQ^T b$ par $Q^T Q$. Et ceci est égal... Bon maintenant, qu'est-ce qu'on a montré ici ? On a montré que $Q^T Q$ est égal à la matrice identité, donc ça. Ici, je peux simplifier. Donc j'ai $Q^T Q^T b - Q^T Q^T b$ et ceci est égal à zéro. Donc c'est ce que je voulais. Donc ça, ça implique que le $b - QQ^T b$ est dans l'orthogonale un et par l'unicité de la projection orthogonale, on a que $QQ^T b$ est égal à cette projection. Donc ça, c'est cette première proposition qui est un peu technique. Peut-être ça n'aide pas de se rappeler de ça, mais ça, c'est la clé de la démonstration de la proposition que j'ai énoncée au début.

Notes

Summary



On a $A = QR$ et on souhaite résoudre $AX = b$ au sens des moindres carrés.

↓ une factorisation QR. Posons $\hat{X} = R^{-1} Q^T b$. À montrer: $\hat{X}$ est une solution au sens des moindres carrés. Il faut montrer que $A\hat{X} = \text{proj}_W b$ où W = l'espace colonnes de A .

$$A\hat{X} = AR^{-1}Q^T b = QRR^{-1}Q^T b = QQ^T b = \text{proj}_W b, \text{ par la proposition précédente.}$$

Pourquoi cette solution est-elle unique



9.14 Factorisation QR - application à la résolution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés



Donc maintenant, je souhaite résoudre $AX = b$ au sens des moindres carrés et j'ai ici une factorisation QR de la matrice A . Et ce que dit la proposition c'est que si on pose $X_{\text{chapeau}} = R^{-1} Q^T b$, que ceci est censé être une solution. X_{chapeau} est une solution et en fait l'unique solution, mais ça j'expliquerai après, est une solution au sens des moindres carrés. Alors pour voir ça, il faut montrer que AX_{chapeau} donne exactement la projection sur W de b où le W est l'espace des colonnes de A . Alors j'y vais. j'ai $AX_{\text{chapeau}} = AR^{-1} Q^T b = QR^{-1} Q^T b$ Ça, c'est $QQ^T b$. Et ici effectivement, par la proposition précédente, ça, c'est la projection. OK, très bien. Donc effectivement, je fais ça et j'obtiens la projection. Et ça, c'est exactement ce qu'on a vu comme la définition même de la solution au sens des moindres carrés d'un système d'équations. Maintenant, l'énoncé de la proposition dit aussi que c'est l'unique solution. Donc je vais juste faire une remarque. Pourquoi cette solution est-elle unique ? Ce n'est pas en général le cas dans l'exemple que j'avais donné de la résolution de système au sens des moindres carrés avant.

Notes

Summary



8m 20s

On a $A = QR$ et on souhaite résoudre $AX = b$ au sens des moindres carrés.

↓ une factorisation QR. Posons $\hat{X} = R^{-1}Q^T b$. À noter: $\hat{X}$ est une solution au sens des moindres carrés. Il faut montrer que $A\hat{X} = \text{proj}_W b$ où W = l'espace colonnes de A .

$$A\hat{X} = AR^{-1}Q^T b = QRR^{-1}Q^T b = QQ^T b = \text{proj}_W b, \text{ par la proposition précédente.}$$

Pourquoi cette solution est-elle unique?

On suppose les colonnes de A linéairement indépendantes. $\Rightarrow \dim W = n$.

A est la matrice de $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\dim(\text{Im } \varphi) = n$.

Par le théorème du rang, $n = \dim(\ker \varphi) + \dim(\text{Im } \varphi) \Rightarrow \ker \varphi = \{0\}$.

Supposons qu'

9.14 Factorisation QR - application à la résolution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés



Alors il y avait plusieurs solutions au sens des moindres carrés. Il n'y avait pas une seule solution mais ici, dans le cas où les colonnes de A sont linéairement indépendantes, alors on obtient une unique solution au sens des moindres carrés. Et puis la raison... Donc je dis la raison. Donc les colonnes... Donc on suppose les colonnes de A linéairement indépendantes, linéairement indépendantes. Alors ça veut dire que la dimension... Donc la dimension de ce W est égale au nombre de colonnes, donc c'est égal à n . Et puis, on a A qui représente une application linéaire, d'une application linéaire qui va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Et puis, par l'espace des colonnes c'est l'image de φ , donc la dimension de l'image de φ est égale à n . Mais par le théorème du rang, on a que n , qui est la dimension de l'espace de départ, est égal à la dimension du noyau plus la dimension de l'image. Donc comme ceci est égal à n , on sait que le noyau de φ est égal à zéro. Donc maintenant, supposons qu'on avait deux solutions. Supposons que X chapeau et Y chapeau sont deux solutions du système $AX = b$ au sens des moindres carrés.

Notes

Summary



On a $A = QR$ et on souhaite résoudre $AX = b$ au sens des moindres carrés.

↓ une factorisation QR. Posons $\hat{X} = R^{-1}Q^T b$. À noter: $\hat{X}$ est une solution au sens des moindres carrés. Il faut montrer que $A\hat{X} = \text{proj}_W b$ où W = l'espace colonnes de A .

$$A\hat{X} = AR^{-1}Q^T b = QRR^{-1}Q^T b = QQ^T b = \text{proj}_W b, \text{ par la proposition précédente.}$$

Pourquoi cette solution est-elle unique?

On suppose les colonnes de A linéairement indépendantes. $\Rightarrow \dim W = n$.

A est la matrice de $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\dim(\text{Im } \varphi) = n$.

Par le théorème du rang, $n = \dim(\ker \varphi) + \dim(\text{Im } \varphi) \Rightarrow \ker \varphi = \{0\}$.

Supposons que $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont deux solutions du système $AX = b$ au sens des moindres carrés.
 $A\hat{X} = \text{proj}_W b = A\hat{Y}$. Par conséquent, $A(\hat{X} - \hat{Y}) = 0 \Rightarrow \varphi(\hat{X} - \hat{Y}) = 0 \Rightarrow \hat{X} - \hat{Y} \in \ker(\varphi) \Rightarrow \hat{X} = \hat{Y}$.

9.14 Factorisation QR - application à la résolution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés



Alors ça veut dire que $A X_{\text{chapeau}}$ est égal à la projection sur W de b , est égal à $A Y_{\text{chapeau}}$. Donc du coup, par conséquent, on a que $A X_{\text{chapeau}} - A Y_{\text{chapeau}} = 0$, qui est la même chose que de dire φ appliqué au vecteur correspondant est égal à zéro. Et ça implique que $X_{\text{chapeau}} - Y_{\text{chapeau}}$ c'est dans le noyau de φ et comme le noyau est égal à zéro, $X_{\text{chapeau}} = Y_{\text{chapeau}}$. OK, très bien. Donc en fait, il y a une unique solution et puis on a même une formule, là, pour trouver cette solution.

Notes

Summary



Exemple. Utiliser la décomposition QR de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ pour résoudre } AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ au sens des moindres carrés.}$$

On avait la factorisation QR de A : $Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$; $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

Posons $\hat{X} = R^{-1} Q^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

9.14 Factorisation QR - application à la résolution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés



Maintenant, je termine en faisant un exemple. Je vais reprendre la matrice A , que nous avons utilisée dans le paragraphe 9.13. Comme j'ai déjà calculé une factorisation QR de cette matrice. Et puis, je vais résoudre au sens des moindres carrés le système $AX = (0 \ 1 \ 2 \ 1)$. Et puis, vous pouvez peut-être regarder qu'en fait il n'y a pas de solution au système $AX = b$ mais on va trouver une solution au sens des moindres carrés. Donc on avait... Je commence ici. On avait la factorisation QR de A comme suit : $Q = 1/6$ la matrice $(5 \ -1, \ 1 \ 5, \ -3 \ 1, \ 1 \ 3)$ et R c'est la matrice $(6 \ 12, \ 0 \ 6)$. Comme dans la formule je dois avoir R inverse, donc je calcule déjà R^{-1} est égal à la matrice. Bon là, je vous laisse calculer, c'est pas compliqué. $(1/6 \ 0 \ -1/3 \ 1/6)$ Et puis, posons, comme dans la formule, $X_{\text{chapeau}} = R^{-1} Q^T$ et cette matrice b . Bon, je vous laisse calculer. Donc R^{-1} c'est... Donc j'ai $1/6$ ici, $1/6$, et puis, je mets en évidence peut-être le $1/6$ de R^{-1} aussi. Donc après, R^{-1} ... Donc je mets en évidence $1/6$, donc ici, j'ai $(1 \ -2, \ 0 \ 1)$ et qui multiplie Q^T .

Notes

Summary



13m 10s

Exemple. Utiliser la décomposition QR de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ pour résoudre } AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ au sens des moindres carrés.}$$

On avait la factorisation QR de A : $Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$; $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

Posons $\hat{X} = R^{-1}Q^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} -24 \\ -10 \end{pmatrix}$

$\hat{X} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 5/18 \end{pmatrix}$. L'unique solution au sens des moindres carrés du système $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(On peut vérifier que $A \begin{pmatrix} -2/3 \\ 5/18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15/18 \\ 23/18 \\ 11/18 \\ 13/18 \end{pmatrix}$)

9.14 Factorisation QR - application à la résolution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés



Bon, le $1/6$ j'ai déjà mis devant pour le Q^T . Donc j'ai $(5 \ 1 \ -3 \ 1, \ -1 \ 5 \ 1 \ 3)$. Donc la matrice b , $(0 \ 1 \ 2 \ 1)$. Donc, j'ai $1/36$, la matrice $(1 \ -2, \ 0 \ 1)$. Ici, je vais faire la multiplication. Donc j'ai $0 + 1 - 6 - 5 + 1 = -4$. Ensuite, $0 + 5 + 2$ ça fait 7 , $+ 3 = 10$. Donc j'ai $1/36$ qui multiplie la colonne. Ici, $-4 - 2 = -24$. Et puis, 10 . Donc égal... X chapeau est égal à $(-2/3 \text{ et puis } 5/18)$. Donc ça, c'est l'unique solution au sens des moindres carrés du système $AX = (0 \ 1 \ 2 \ 1)$ Je ne vais pas le faire, mais si vous voulez faire une sorte de vérification parce que c'est toujours bien d'avoir une autre façon d'arriver à la réponse, de vérifier la réponse. Je vais juste indiquer. On pourrait faire la vérification suivante : On peut vérifier... d'ailleurs je l'ai fait. On peut vérifier que si on fait A fois X chapeau $(-2/3 \ 5/18)$, que ceci donne... Bon, j'écris déjà ce que ça donne. C'est $-15/18 \ 23/18, \ 11/18$ et puis $13/18$. Et puis je dis que vous pouvez aller faire la projection parce qu'on avait conçu une base orthonormée de l'espace des colonnes de A .

Notes

Summary



Exemple. Utiliser la décomposition QR de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ pour résoudre } AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ au sens des moindres carrés.}$$

On a la factorisation QR de A : $Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$; $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

Posons $\hat{X} = R^{-1}Q^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} -24 \\ 16 \end{pmatrix}$

$\hat{X} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 5/9 \end{pmatrix}$. L'unique solution au sens des moindres carrés du système $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(On peut vérifier que $A \begin{pmatrix} -2/3 \\ 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15/9 \\ 23/9 \\ 11/9 \\ 13/9 \end{pmatrix} = \text{la projection orthogonale de } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sur } W = \text{l'espace colonne de } A$.)



9.14 Factorisation QR - application à la résolution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés

On peut vérifier que ceci égal à ça est égal à la projection orthogonale du vecteur, ce vecteur-là, sur W qui est égal à l'espace colonne de A . Donc je rappelle ce qu'il faut. Il faudrait avoir une base orthonormée ou bien peut-être une base orthogonale de W pour faire cette projection et comme on a déjà calculé une base orthonormée de W , c'est pas si compliqué de faire la projection. Et puis, je l'ai fait et puis j'ai vérifié qu'effectivement, cette projection donne ce vecteur-là. Donc ça serait une vérification indépendante que nous avons trouvé la bonne solution ici. Voilà.

Notes

Summary

