





10.0 Question de motivation

Dans le dernier chapitre de ce cours, nous allons mettre ensemble ce que nous avons vu dans le chapitre 8 et dans le chapitre 9. Jusqu'au chapitre 8, on était en train d'étudier les espaces vectoriels, et ensuite les applications linéaires entre les espaces vectoriels, ou bien d'un espace vectoriel vers le même espace. Et après, dans le chapitre 9, nous avons mis une géométrie sur l'espace vectoriel. Et maintenant, on aimerait étudier le lien entre cette géométrie et les applications de l'espace. Et après, on aura beaucoup d'applications de la théorie que nous développerons. Mais pour commencer, j'aimerais juste poser une question de motivation, et après, au cours du chapitre, on va répondre à cette question.

Notes

Summary



0m 04s

Soit V un espace euclidien, i.e. un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire de V dans V et soit $A = [\phi]_B$ la matrice de ϕ par rapport à une base orthonormée fixe B .

Rappel Si existe une base de V de vecteurs propres de ϕ , dans B' , alors $[\phi]_{B'}$ est diagonale et il existe $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ inversible t.q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.

10.0 Question de motivation



Donc je me donne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, qui est muni d'un produit scalaire, donc un espace euclidien. Et je me donne une transformation linéaire de V dans V , et je pose la matrice de cette transformation par rapport à une base orthonormée. Donc je souligne, ici, orthonormée. Ensuite, on sait que s'il existe une base propre, une base de vecteurs propres de ϕ , alors il existe ensuite une matrice inversible P , telle qu'on peut diagonaliser la matrice A . Donc ça, je veux le rappeler, c'était dans le chapitre 8, pas dans le 9. On se rappelle que s'il existe une base de vecteurs propres pour ϕ , une base de V , appelons cette base B' , alors, d'une part, la matrice de ϕ par rapport à cette base-là est diagonale, et il existe une matrice inversible qui est une matrice de passage. Disons que ça, c'est de dimension finie n , donc il existe une matrice $n \times n$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Et en fait, on prend la matrice de passage de B vers B' , et cette conjugaison-là, ça donne la matrice de ϕ par rapport à la base B' .

Notes

Summary



Soit V un espace euclidien, i.e. un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire de V dans V et soit $A = [\phi]_B$ la matrice de ϕ par rapport à une base orthonormée fixe B .

Rappel Si existe une base de V de vecteurs propres de ϕ , dans B' , alors $[\phi]_{B'}$ est diagonale et il existe $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ inversible t.q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Question A quel point la transformation associée à P "préserve" ou "déforme" la géométrie sur V ?
Est-ce que le changement de base de B à B' préserve les angles, les longueurs?

10.0 Question de motivation



Alors la question que je vais poser, la question de motivation, c'est à quel point ce changement de base déforme la géométrie ou préserve la géométrie sur V ? Donc ça, c'est la question. Donc je fais un changement de base, est-ce que ce changement de base m'emmène vers une autre base orthonormée ou pas? Donc, plus précisément, est-ce que ça préserve par exemple les angles, les longueurs, les angles entre les vecteurs et les longueurs? Et pour vous donner une idée de ce qui peut arriver, on considère deux exemples.

Notes

Summary



2m 41s

Exemple 1. Soit $S_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $v = (a, b)$. On a $S_v(u) = 2\text{proj}_v(u) - u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ et, $\text{proj}_v(u) = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$.

Fixons la base canonique orthonormée $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

Fixons aussi la base $\mathcal{B}$, $\left\{ \frac{v}{\|v\|}, v' \right\}$, $v' \in \text{Vect}(v)^\perp$ et v' de norme 1.



10.0 Question de motivation

Le premier exemple, je me donne l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui est la symétrie orthogonale par rapport à un vecteur fixe v . On a déjà développé une formule pour ça, et on sait que la symétrie orthogonale, c'est deux fois la projection moins le vecteur, et puis que la projection est donnée par cette formule-là, où le $u \cdot v$, c'est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$, et maintenant, je vais fixer d'abord la base canonique orthonormée, et la matrice de l'application ne sera pas forcément diagonale par rapport à cette base-là, ça dépend du vecteur $v = (a, b)$. Mais après, je vais fixer une autre base, que je définis comme suis : d'abord, je prends v divisé par sa norme $\|v\|$, donc ça, c'est le vecteur fixe, ici, c'est le vecteur par rapport auquel je fais la symétrie orthogonale. Et après, j'aimerais la normaliser, donc maintenant j'ai un vecteur de norme un. Et avec ça, je vais mettre v' , sur la base $\mathcal{B}$, ce vecteur-là, et le vecteur v' , où je prendrais v' dans l'espace orthogonal au vecteur v , et v' de norme un. Donc du coup, j'ai deux vecteurs, ici, qui sont de norme un, et les deux sont orthogonaux, donc c'est de nouveau une base orthonormée.

Notes

Summary



3m 39s

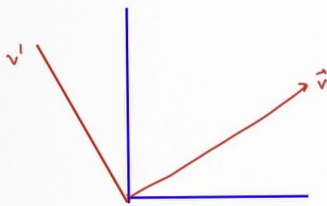
Exemple 1. Soit $S_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $v = (a, b)$. On a $S_v(u) = 2\text{proj}_v(u) - u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ et, $\text{proj}_v(u) = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$.

Fixons la base canonique orthonormée $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

Fixons aussi la base B , $\left\{ \frac{v}{\|v\|}, v' \right\}$, $v' \in \text{Vect}(v)^\perp$ et v' de norme 1.

Donc B est une base orthonormée.

La matrice de S_v par rapport à la base B est $[S_v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



10.0 Question de motivation



Je considère maintenant la matrice de l'application par rapport à la base B , et d'abord, je dois dire où va le vecteur $v/\|v\|$. Alors le vecteur v , si on le mets ici, dedans, on a $\langle v, v \rangle / \langle v, v \rangle v$. Ensuite, la projection de v sur lui-même, c'est v , donc on a $2v - v$, donc le vecteur va être envoyé à lui-même, et puis géométriquement, ce qui est en train de se passer c'est que j'ai un vecteur, disons v , comme ça, et puis je fais la symétrie orthogonale par rapport à ce vecteur-là, donc ça veut dire que je bascule tout le monde de l'autre côté, mais c'est clair que le vecteur v reste fixe, donc par l'application linéaire de la projection, il est envoyé à lui-même. Et puis le vecteur v' , qui est un vecteur orthogonal, ici, il est basculé de l'autre côté, donc il est envoyé à $-v'$. Donc la matrice de cette application par rapport à la base B est une matrice diagonale, et on a envoyé la base vers une base orthonormée, donc on a en quelques sortes, préservé la géométrie de l'espace.

Notes

Summary



5m 40s

Exemple 2. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $\phi((a, b, c)) = (a, a + c, c)$. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $[\phi]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie que

$$\begin{aligned}\phi((1, 1, 0)) &= (1, 1, 0) \\ \phi((0, 1, 0)) &= (0, 0, 0) \\ \phi((0, 1, 1)) &= (0, 1, 1)\end{aligned}$$

$B = ((1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$ est une base de vecteurs propres de ϕ .

10.0 Question de motivation



Maintenant, deuxième exemple, là, je me donne une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, et puis je donne ma définition, et puis je représente cette application par rapport à la base canonique orthonormée, et puis, ça c'est la représentation matricielle. Et après, on peut chercher à voir si on peut diagonaliser cette matrice, et je dis qu'on peut la diagonaliser, je vais vous donner tout de suite la base de vecteurs propres, donc on vérifie que si j'applique ϕ au vecteur $(1, 1, 0)$, on va maintenant utiliser la formule-là, et vous aurez $(1, 1, 0)$, si j'applique ϕ au vecteur $(0, 1, 0)$, j'obtiens le vecteur nul. Et ϕ appliquée au vecteur $(0, 1, 1)$, j'obtiens le vecteur $(0, 1, 1)$. Donc, en fait, c'est une base de vecteurs propres. C'est une base, parce que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants. Donc B , c'est l'ensemble ordonné formé des vecteurs $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$, et c'est une base de vecteurs propres de ϕ . Et puis c'est une base de vecteurs propres, ce n'est pas une base orthonormée, parce que ce ne sont pas des vecteurs de norme un. On peut les normaliser.

Notes

Summary



7m 27s

Exemple 2. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $\phi((a, b, c)) = (a, a + c, c)$. Soit

$\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $[\phi]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{On vérifie que } \phi((1, 1, 0)) = (1, 1, 0)$$

$$\phi((0, 1, 0)) = (0, 0, 0)$$

$$\phi((0, 1, 1)) = (0, 1, 1)$$

$B = ((1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$ est une base de vecteurs propres de ϕ .

$$B' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), (0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \right)$$

Par contre l'angle entre $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 0)$ est $\pi/4$.

On verra qu'il n'existe aucune base orthonormée de vecteurs propres de ϕ .

10.0 Question de motivation



Définissons B' , je peux faire $1/\sqrt{2}$ ce vecteur-là. Celui-là, il est de norme 1, et $1/\sqrt{2}$, le troisième. Maintenant, c'est une base de vecteurs propres de ϕ , chaque vecteur est de norme 1, mais si vous regardez les angles entre les vecteurs, par contre, l'angle entre le premier vecteur et le deuxième, qui est le même que l'angle entre ces deux vecteurs-là, parce que j'ai juste normalisé, est égal à $\pi/4$. Donc on n'a pas du tout une base orthonormée, et puis d'ailleurs on peut montrer que cette matrice-là, on ne peut pas la diagonaliser en préservant la géométrie, ça c'est quelque chose que nous verrons plus tard, au milieu du chapitre. Il y a un critère qui dit quand on peut faire ça, et quand on ne peut pas. Mais ici, on montrera, on verra qu'il n'existe pas, disons aucune base orthonormée, de vecteurs propres de ϕ . Donc on peut diagonaliser cette application, mais on ne peut pas la diagonaliser en préservant tous les angles et les longueurs. Ça, c'est la question que nous aimerions traiter dans ce chapitre.

Notes

Summary



9m 10s