



10.1 Matrices et transformations orthogonales



Dans cette vidéo, je vais formaliser cette notion de préservation de la géométrie d'un espace euclidien. Je me donne un espace euclidien et une transformation linéaire de cet espace, et je veux formaliser la notion, en donnant une définition, j'ai une application, ça préserve la géométrie. Donc je donne la définition.

Notes

Summary



0m 04s

Définition.

- (1) Soit V un espace euclidien. Soit $T : V \rightarrow V$ une application $\mathbb{R}$ -linéaire. On dit que T est **orthogonale** si $\|T(v)\| = \|v\|$ pour tout $v \in V$.
- (2) Soit $V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, et soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On dit que A est **orthogonale** si $\|AX\| = \|X\|$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.



10.1 Matrices et transformations orthogonales



Je commence avec un espace euclidien, un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire et l'espace est de dimension finie. Et je me donne une transformation linéaire de cet espace. On dit que T est orthogonal si la longueur de l'image de V est égale à la longueur de V . Donc $\|T(v)\| = \|v\|$ pour tout v dans V . On peut donner une définition analogue pour une matrice, donc on donne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Et on se donne une matrice $n \times n$. On dit que cette matrice est orthogonale si en l'appliquant, c'est-à-dire en multipliant par n'importe quel vecteur colonne, $\|AX\| = \|X\|$ pour tout X . Je vais faire des remarques et vous montrer que cette définition a des applications directes. Mais d'abord, j'aimerais juste parler de deux exemples et une première remarque : Donc est-ce que l'on peut déjà imaginer quelques applications orthogonales ? Exemples : D'abord, si on fait une rotation dans l'espace $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, autour d'un axe qui passe par l'origine; donc une rotation, disons R_θ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Notes

Summary



0m 26s

Définition.

- (1) Soit V un espace euclidien. Soit $T : V \rightarrow V$ une application $\mathbb{R}$ -linéaire. On dit que T est **orthogonale** si $\|T(v)\| = \|v\|$ pour tout $v \in V$.
- (2) Soit $V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, et soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On dit que A est **orthogonale** si $\|AX\| = \|X\|$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

Exemples

- ① Une rotation $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- ② Une symétrie orthogonale $S_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- ③ Une projection orthogonale sur un vecteur $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
un plan $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.



10.1 Matrices et transformations orthogonales

Vous pouvez écrire la matrice de cette application et vérifier ça ou bien vous pouvez l'appliquer à un vecteur mais on voit très bien que si l'on fait une rotation, ça préserve la norme de chaque vecteur, ça ne change pas la longueur des vecteurs. Donc une rotation. Aussi, une symétrie orthogonale comme ce que l'on a vu dans la vidéo précédente; une symétrie orthogonale S_v de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. De nouveau, vous avez un vecteur qui est envoyé à son image par rapport à une symétrie orthogonale et puis ça ne change pas la norme du vecteur. Par contre, une autre application linéaire qui est une application plutôt géométrique c'est une projection. Une projection orthogonale sur un vecteur ou sur un plan, $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ou sur un plan $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Et ici, il y a un problème : si on prend un vecteur orthogonal au vecteur original, ou bien qui est orthogonal au plan, alors ce vecteur-là sera écrasé, à zéro donc la norme n'est pas du tout préservée donc ça, c'est en fait un non-exemple.

Notes

Summary



2m 00s

Définition.

- (1) Soit V un espace euclidien. Soit $T : V \rightarrow V$ une application $\mathbb{R}$ -linéaire. On dit que T est **orthogonale** si $\|T(v)\| = \|v\|$ pour tout $v \in V$.
- (2) Soit $V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, et soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On dit que A est **orthogonale** si $\|AX\| = \|X\|$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

Exemples ① Une rotation $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

② Une symétrie orthogonale $S_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

③ π , Une projection orthogonale sur un vecteur
un plan $\left. \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{matrix} \right\}$ non orthogonale car il
existe des vecteurs $v \neq 0$
t.q. $\pi(v) = 0$.
 $\|\pi(v)\| = 0 \neq \|v\|$.

Premier constat: Si $T : V \rightarrow V$ est orthogonale, alors T est
injective.

10.1 Matrices et transformations orthogonales



Notes

C'est non orthogonal, car il existe des vecteurs v dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ différents de zéro telle que la projection, disons que c'est π , tel que $\pi(v)$ est égal à zéro. Ça veut dire que $\|\pi(v)\| = 0 \neq \|v\|$. Donc si on fait une rotation, ça préserve les normes, si on fait une symétrie orthogonale ça préserve les normes, et si on fait une projection orthogonale, ça ne préserve pas du tout les normes. Et ce troisième contre-exemple, non-exemple, donne aussi lieu à un premier constat : une application linéaire orthogonale doit forcément être injective. Si $T : V \rightarrow V$ est orthogonale, alors T est injective. Exactement pour cette raison-là, si $T(v) = 0$, ça veut dire que $\|T(v)\| = 0$, ça veut dire que $\|v\| = 0$ donc le vecteur v est le vecteur nul. Maintenant supposons que l'on a une application linéaire qui est orthogonale, ça veut dire que ça préserve les normes; mais je suis aussi intéressée par le reste de la géométrie, pas que la norme des vecteurs mais aussi des angles entre les vecteurs. Et je me demande si cette application préserve aussi des angles. Donc j'aborde cette question.

Summary



Question Qu'en est-il des angles?

Soit $T: V \rightarrow V$ une transformation linéaire orthogonale. Soient $u, v \in V$.

$$\|T(u+v)\| = \|u+v\|.$$

$$\|T(u+v)\|^2 = \|u+v\|^2$$

$$\begin{aligned} \text{Côté gauche: } \langle T(u+v), T(u+v) \rangle &= \langle T(u) + T(v), T(u) + T(v) \rangle \\ &= \langle T(u), T(u) \rangle + \langle T(u), T(v) \rangle + \langle T(v), T(u) \rangle + \langle T(v), T(v) \rangle \end{aligned}$$



10.1 Matrices et transformations orthogonales



Question : qu'en est-il des angles? Je me donne une application linéaire qui est orthogonale. Soit T de V dans V , V est toujours un espace euclidien, une transformation orthogonale. Et je me donne deux vecteurs dans V . Comme T est une transformation orthogonale, je sais que si je fais $\|T(u+v)\|$ c'est la même chose que $\|u+v\|$. Donc si je fais le carré de $\|T(u+v)\|$, c'est égal au carré de $\|u+v\|$. Maintenant, je vais développer cette égalité-là. Le côté gauche se calcule comme suit : je fais le produit scalaire de $T(u+v)$ avec lui-même. Disons ici que V est muni de ce produit scalaire là, alors ceci est égal, comme T est linéaire, ça, c'est $T(u) + T(v)$, même chose. C'est un produit scalaire donc c'est linéaire à gauche et à droite, donc je peux tout défaire ici et j'ai : $T(u)$ avec lui-même. J'ai $\langle T(u), T(v) \rangle$, et dans l'autre sens, et enfin $T(v)$ avec lui-même. Et puis donc ici j'ai $\|T(u)\|^2$. Ici, j'ai deux fois, parce que c'est symétrique, c'est un produit scalaire j'ai $2\langle T(u), T(v) \rangle$ et ici j'ai : $\|T(v)\|^2$. Maintenant je développe aussi le côté droit de cette égalité-là.

Notes

Summary



5m 30s

Question Qu'en est-il des angles?

Soit $T: V \rightarrow V$ une transformation linéaire orthogonale. Soient $u, v \in V$.

$$\|T(u+v)\| = \|u+v\|$$

$$\|T(u+v)\|^2 = \|u+v\|^2$$

Côté gauche: $\langle T(u+v), T(u+v) \rangle = \langle T(u) + T(v), T(u) + T(v) \rangle$

$$= \langle T(u), T(u) \rangle + \langle T(u), T(v) \rangle + \langle T(v), T(u) \rangle + \langle T(v), T(v) \rangle$$
$$= \|T(u)\|^2 + 2\langle T(u), T(v) \rangle + \|T(v)\|^2$$

Côté droit: $\langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

Comme $\|T(u)\|^2 = \|u\|^2$ et $\|T(v)\|^2 = \|v\|^2$. On déduit que $\langle u, v \rangle = \langle T(u), T(v) \rangle$.

10.1 Matrices et transformations orthogonales



Par la même chose, j'ai $\langle u+v, u+v \rangle$ je développe, c'est linéaire des deux côtés, et j'ai : $\langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$ donc $\|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$ Donc comme j'ai cette égalité-là, on a finalement que ceci est égal à ça. Mais on se rappelle aussi que : Comme T est orthogonale, $\|T(u)\|^2 = \|u\|^2$ et $\|T(v)\|^2 = \|v\|^2$ donc on déduit que... Bon, je peux effacer les deux ici. Que $\langle u, v \rangle = \langle T(u), T(v) \rangle$. Maintenant on se rappelle qu'il y avait un lien entre l'angle entre u et v et ce produit scalaire-là. Donc soit θ l'angle entre u et v et γ l'angle entre $T(u)$ et $T(v)$ donc, de cette égalité-là, on a que : $\cos(\theta)/\|u\|\|v\| = \cos(\gamma)/\|T(u)\|\|T(v)\|$ De nouveau, j'utilise le fait que $\|u\| = \|T(u)\|$, $\|v\| = \|T(v)\|$ et je déduis que le cosinus de θ est égal au cosinus de γ , et comme θ est un angle entre zéro et π , et γ aussi, ça implique que $\theta = \gamma$ Donc on commence avec une application linéaire et ce que l'on sait d'elle, c'est qu'elle préserve des normes.

Notes

Summary



Question Qu'en est-il des angles?

Sont $T: V \rightarrow V$ une transformation linéaire orthogonale. Soient $u, v \in V$.

$$\|T(u+v)\| = \|u+v\|$$

$$\|T(u+v)\|^2 = \|u+v\|^2$$

Côté gauche: $\langle T(u+v), T(u+v) \rangle = \langle T(u) + T(v), T(u) + T(v) \rangle$

$$= \langle T(u), T(u) \rangle + \langle T(u), T(v) \rangle + \langle T(v), T(u) \rangle + \langle T(v), T(v) \rangle$$

$$= \|T(u)\|^2 + 2\langle T(u), T(v) \rangle + \|T(v)\|^2$$

Côté droit: $\langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

Comme $\|T(u)\|^2 = \|u\|^2$ et $\|T(v)\|^2 = \|v\|^2$. On déduit que $\langle u, v \rangle = \langle T(u), T(v) \rangle$.

Soient θ l'angle entre u et v et γ l'angle entre $T(u)$ et $T(v)$.

$$\frac{\cos \theta}{\|u\| \|v\|} = \frac{\cos \gamma}{\|T(u)\| \|T(v)\|} \Rightarrow \cos \theta = \cos \gamma \Rightarrow \theta = \gamma.$$

T préserve aussi les angles.



10.1 Matrices et transformations orthogonales

Et on déduit qu'elle préserve aussi des angles, donc elle envoie deux vecteurs u et v à deux vecteurs $T(u)$ et $T(v)$ et l'angle entre u et v est le même que l'angle entre $T(u)$ et $T(v)$. Donc le constat, c'est que T préserve aussi les angles. Donc ça, c'est très bien. Maintenant on a donné la définition d'une application qui préserve les angles entre les vecteurs et les normes et on appelle ça une application orthogonale.

Notes

Summary

