



10.2 Matrices orthogonales, équivalences



Maintenant, nous continuons avec l'étude de nos applications linéaires orthogonales et puis, ici, je vais plutôt travailler avec des matrices, mais à chaque fois qu'on a une application linéaire on a une matrice qui la représente. Donc, je vais reprendre la définition d'une matrice orthogonale et puis, je vais vous donner quelques équivalences à la définition.

Notes

Summary



0m 04s

Proposition. Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien usuel. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (c_1) . $\|AX\| = \|X\|$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_2) . $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour tous $X, Y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_3) . $AA^T = I = A^T A$.
- (c_4) . Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- (c_5) . Les colonnes de A vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si A est orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.

Preuve $c_1 \Rightarrow c_2$ déjà démontré dans la vidéo précédente.

10.2 Matrices orthogonales, équivalences

Donc, pour le cas des matrices, la définition était qu'on concevait $\mathbb{R}^n$, l'espace euclidien usuel, donc, produit scalaire usuel, et je prends une matrice. Et puis, je vais vous donner cinq conditions équivalentes à la définition, que la matrice est orthogonale. Une première et que la longueur de AX est égale à celle de X pour tout vecteur-colonne X . Donc, il y a ces équivalences-là, et je vais juste montrer ces équivalences, et ensuite, une deuxième condition qui n'est pas équivalente, mais une conséquence de la définition. Donc, je fais la preuve ici. Preuve : Maintenant, on a déjà fait, dans la vidéo précédente, la direction où, si on a une matrice orthogonale, on a qu'elle préserve les angles. J'avais fait la démonstration, pas avec la matrice, mais avec l'application linéaire, mais comme on sait que cette matrice représente une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, je peux utiliser la démonstration que j'ai faite avant. Donc, le (c_1) implique (c_2) , c'était vu dans la vidéo précédente. Et puis, maintenant, le (c_2) implique (c_1) , et, c'est absolument clair, parce que si $\langle AX, AY \rangle$, est égal à $\langle X, Y \rangle$ pour tout X, Y , je pourrais prendre $X=Y$, et j'aurais alors $\langle AX, AX \rangle = \langle X, X \rangle$.

Notes

Summary



Proposition. Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien usuel. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (c_1) . $\|AX\| = \|X\|$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_2) . $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour tous $X, Y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_3) . $AA^T = I = A^T A$.
- (c_4) . Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- (c_5) . Les colonnes de A vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si A est orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.

Preuve $c_1 \Rightarrow c_2$ déjà démontré dans la vidéo précédente.

$c_2 \Rightarrow c_1$ clair.

$c_1 \Leftrightarrow c_3$

A orthogonale $\Leftrightarrow \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour tous $X, Y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

$$\Leftrightarrow (AX)^T \cdot AY = X^T \cdot Y \quad \text{pour tous } X, Y$$

$$\Leftrightarrow X^T A^T A Y = X^T \cdot Y \quad "$$

$\Leftrightarrow$



10.2 Matrices orthogonales, équivalences

Donc, les carrés des deux normes sont égaux. Je prends la racine carrée, et comme ce sont des valeurs positives, j'ai que les deux normes sont égales. Donc, ça, c'est clair. Donc, du coup, on sait que (c_1) et (c_2) sont équivalentes. Maintenant, je vais supposer (c_1) et (c_2) , et je vais déduire (c_3) . Donc, en particulier je montre (c_1) équivalent à (c_3) . Je prends A une matrice orthogonale, et ça, c'est par définition, si et seulement si, puisque, comme (c_1) est équivalent à (c_2) , si et seulement si $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour tout vecteur colonne X et Y . Maintenant, on se rappelle que, quand c'est le produit scalaire usuel, on peut remplacer ça par un produit de matrice. Donc, ça, c'est si et seulement si $(AX)^T$ qui est une ligne, qui multiplie la colonne AY , est égal à la ligne X^T qui multiplie la colonne Y . Maintenant, c'est une multiplication matricielle. Et ça, c'est si et seulement si, bon, ça, c'est la même chose que $X^T A^T A Y = X^T Y$. Si et seulement si, c'est toujours pour tous vecteurs-colonnes X, Y . La même chose ici. Bon, je ramène tout d'un côté.

Notes

Summary



2m 03s

Proposition. Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien usuel. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (c_1) . $\|AX\| = \|X\|$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_2) . $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour tous $X, Y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_3) . $AA^T = I = A^T A$.
- (c_4) . Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- (c_5) . Les colonnes de A vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si A est orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.

Preuve $c_1 \Rightarrow c_2$ déjà démontré dans la vidéo précédente.

$c_2 \Rightarrow c_1$ clair.

$c_1 \Leftrightarrow c_3$

A orthogonale $\Leftrightarrow \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour tous $X, Y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

$$\Leftrightarrow (AX)^T \cdot AY = X^T \cdot Y \quad \text{pour tous } X, Y$$

$$\Leftrightarrow X^T A^T A Y = X^T \cdot Y \quad "$$

$$\Leftrightarrow X^T A^T A Y - X^T \cdot Y = 0 \quad "$$

$$\Leftrightarrow X^T (A^T A - I) Y = 0 \quad "$$

$$\Leftrightarrow \langle X, (A^T A - I) Y \rangle = 0 \quad "$$

$$\Leftrightarrow (A^T A - I) Y = 0 \quad \text{pour tout } Y$$

$$\Leftrightarrow A^T A - I = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T A = I.$$



10.2 Matrices orthogonales, équivalences

Donc, j'ai $X^T A^T A Y - X^T Y = 0$. C'est toujours pour tout X, Y . Maintenant, je peux mettre en évidence, à gauche, X^T , et à droite, Y , et ici, il me reste l'identité, est égal à 0. Ça, c'est aussi pour tout X, Y . Et puis, ça, c'est si et seulement si. Je réécris cela en termes du produit scalaire. Donc, ça, c'est le premier vecteur du produit scalaire, et ça, c'est le deuxième. Pour tout X, Y . Donc, du coup, j'ai ici un vecteur qui est orthogonal à tous les vecteurs X, y compris lui-même. Donc, ce vecteur-là est nul. Ça implique, bon, d'ailleurs, ceci est vrai si et seulement si ce vecteur-là, c'est le vecteur nul. Ça, c'est pour tout Y . Et ça, c'est si et seulement si cette matrice-là est la matrice nulle. Ça, on l'a déjà vu. Et ça, si et seulement si $A^T A$ est égal à la matrice identité. Donc, c'est le (c_3) équivalent à (c_1) et (c_2) . Ça, c'est assez super, parce que ça veut dire que si on a une matrice orthogonale, on connaît son inverse. C'est juste la transposée. C'est super facile de calculer l'inverse d'une matrice orthogonale. Maintenant, je veux continuer avec le (c_4) et (c_5) .

Notes

Summary



Proposition. Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien usuel. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (c_1) . $\|AX\| = \|X\|$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_2) . $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour tous $X, Y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_3) . $AA^T = I = A^T A$.
- (c_4) . Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- (c_5) . Les colonnes de A vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si A est orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.

$$c_3 = c_4$$

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \quad A^T = (L_1 | L_2 | \dots | L_n)$$

$$(AA^T)_{ij} =$$

10.2 Matrices orthogonales, équivalences

En fait, je vais montrer (c_4) parce que le (c_5) est pareil. Donc, maintenant, je montre que (c_3) est équivalent à (c_4) . Donc, ici, je commence avec une matrice A et je la considère comme une matrice avec des vecteurs lignes. Ce sont les lignes de la matrice A . Les lignes de A forment une base, vu comme les vecteurs de $\mathbb{R}^n$. C'est ce que je vais considérer. Et puis, A^T , ce serait la matrice où la première ligne devient la première colonne, la deuxième ligne, la deuxième colonne, etc. Maintenant, je fais le produit de AA^T et je considère la composante ij . Alors, si je veux produire la i -ème ligne de cette matrice AA^T , je prends la i -ème ligne ici, et je fais des produits successifs pour chacune des lignes de la matrice ou chacune des colonnes de A^T , donc, les lignes de A . Par exemple, pour la $i1$, je ferais le produit de la ligne i et de la colonne 1. Mais, ça, c'est exactement le produit scalaire de la i -ème ligne avec la première, deuxième, etc., Ainsi ici j'ai le produit scalaire de la i -ème ligne avec la j -ème colonne. Donc, ça, c'est le produit scalaire de L_i avec L_j .

Notes

Summary



5m 52s

Proposition. Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien usuel. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (c_1) . $\|AX\| = \|X\|$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_2) . $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour tous $X, Y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_3) . $AA^T = I = A^T A$.
- (c_4) . Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- (c_5) . Les colonnes de A vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si A est orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.

$$c_3 = c_4$$

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \quad A^T = (L_1 | L_2 | \dots | L_n)$$

$$(AA^T)_{ij} = L_i \cdot L_j$$

$$A \text{ orthogonale} \Leftrightarrow AA^T = I \Leftrightarrow$$

$$(AA^T)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$A \text{ orthogonale} \Leftrightarrow L_i \cdot L_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^n.$$

c_5 similaire.

10.2 Matrices orthogonales, équivalences



Maintenant, la matrice A est orthogonale si et seulement si AA^T est égal à l'identité, et ça, c'est si et seulement si $(AA^T)_{ij}$ est égal à 1, si i est égal à j , et 0, si i est différent de j . Et donc, A est orthogonal si et seulement si la i -ème ligne, la j -ième ligne, le produit scalaire, c'est 1, si i est égal à j , et 0, si i est différent de j . Et ça, c'est exactement équivalent à dire que L_1 jusqu'à L_n est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Donc, voilà. Ça montre que (c_3) est équivalent à (c_4) . Ah, en l'occurrence, je n'ai pas mentionné qu'on avait $A^T A = I_n$, bon, ce qu'on avait montré, c'était que AA^T était l'identité, mais, après, comme ce sont des matrices carrées, on a déjà vu que, si on a une matrice qui est inversible, à gauche ou à droite, qu'on a l'autre côté aussi, et puis qu'on peut calculer son inverse. Donc, on a aussi cette égalité-là. Donc, ça, c'est le (c_4) , et je dis seulement que le (c_5) est similaire. Donc, je ne vais pas le montrer.

Notes

Summary



Proposition. Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien usuel. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (c_1) . $\|AX\| = \|X\|$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_2) . $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour tous $X, Y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_3) . $AA^T = I = A^T A$.
- (c_4) . Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- (c_5) . Les colonnes de A vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si A est orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.

$$c_3 = c_4$$

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \quad A^T = (L_1 | L_2 | \dots | L_n)$$

$$(AA^T)_{ij} = L_i \cdot L_j$$

$$A \text{ orthogonale} \Leftrightarrow AA^T = I \Leftrightarrow$$

$$(AA^T)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$A \text{ orthogonale} \Leftrightarrow L_i \cdot L_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^n.$$

c_5 Similaire.

(2) Supposons A orthogonale, donc $AA^T = I$.

$$\det(AA^T) = \det(I) = 1$$

$$\det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A) = (\det(A))^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det A = \pm 1.$$



10.2 Matrices orthogonales, équivalences

Maintenant, je vais juste terminer avec la partie (2), ici. Donc, la preuve du (2). Après, je ferai des exemples. Donc, la preuve du (2), ici. Je suppose que A est orthogonale. Alors, je vais utiliser le (c_3) , donc, AA^T est égal à l'identité. Je prends cette égalité-là et je fais le déterminant à gauche et à droite. Maintenant, le déterminant de l'identité, c'est juste un. Le déterminant d'un produit, c'est le produit des déterminants. Le déterminant de la matrice transposée, c'est le déterminant de la matrice. Donc, du coup, j'ai que le déterminant de A au carré est égal à un, et donc, le déterminant de A est égal à plus ou moins un. On a beaucoup de conditions, maintenant. Si on a une matrice orthogonale, alors elle est orthogonale, si et seulement si sa transposée est égale à son inverse, c'est déjà très très fort comme condition, ou bien, on regarde les lignes et on voit que ça forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, ou bien, on regarde les colonnes et ça forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Et puis, en plus, si on a une matrice orthogonale, elle a cette bonne propriété que son déterminant est égal à plus ou moins un. Ce n'est pas une équivalence.

Notes

Summary



Proposition. Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien usuel.
Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (c_1) . $\|AX\| = \|X\|$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_2) . $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour tous $X, Y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.
- (c_3) . $AA^T = I = A^T A$.
- (c_4) . Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- (c_5) . Les colonnes de A vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si A est orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.

$$c_3 = c_4$$

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \quad A^T = (L_1 | L_2 | \dots | L_n)$$

$$(AA^T)_{ij} = L_i \cdot L_j$$

$$A \text{ orthogonale} \Leftrightarrow AA^T = I \Leftrightarrow$$

$$(AA^T)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$A \text{ orthogonale} \Leftrightarrow L_i \cdot L_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^n.$$

c_5 Similaire.

(2) Supposons A orthogonale, donc $AA^T = I$.

$$\det(AA^T) = \det(I) = 1$$

$$\det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A) = (\det(A))^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det A = \pm 1.$$



10.2 Matrices orthogonales, équivalences

Il existe sûrement des matrices avec des déterminants plus ou moins un qui ne sont pas orthogonales, mais c'est une implication dans une direction. Maintenant, je termine ce paragraphe-là avec des exemples.

Notes

Summary



10m 54s

Exemples : (1) Soit $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation de θ radians dans le sens trigonométrique.

Soit C la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{R}^2$.

$$[R_\theta]_C = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad [R_\theta]_C^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } [R_\theta]_C \cdot [R_\theta]_C^T = I$$

10.2 Matrices orthogonales, équivalences

Je vais juste vous faire trois exemples. Donc, on a déjà parlé des rotations. Donc soit R_θ la rotation $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, d'angle θ radians dans le sens trigonométrique centré à l'origine. Alors, par rapport à la base canonique, donc, soit C la base canonique orthonormée, alors, si on fait la matrice de θ par rapport à cette base-là, on a déjà vu que c'est la matrice [voir écran] Maintenant, si j'écris la transposée de cette matrice, alors la première ligne devient la première colonne. La deuxième ligne, c'est la deuxième colonne. Regardez, si vous faites le produit de ces deux matrices, vous avez $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$, puis $\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) = 0$, puis $\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) = 0$ et finalement $\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$. Donc, effectivement, le produit des deux matrices est égal à l'identité. Donc, c'est une de nos conditions équivalentes pour que cette matrice soit orthogonale. Donc, on a le produit qui est égal à la matrice identité. Deuxième exemple.

Notes

Summary



Exemples : (1) Soit $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation de θ radians dans le sens trigonométrique.

Soit C la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{R}^2$.

$$[R_\theta]_C = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad [R_\theta]_C^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } [R_\theta]_C \cdot [R_\theta]_C^T = I$$

(2) Soit $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $z=0$. Soit C la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$[S]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [S]_C^{-1} = [S]_C^T = [S]_C.$$



(3)

10.2 Matrices orthogonales, équivalences



Si je prends la symétrie orthogonale par rapport au plan $z = 0$, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, alors, j'écris la matrice de S par rapport à la base canonique, donc, ici, soit C , la base canonique. Alors, la matrice de cette application, c'est bien la symétrie orthogonale par rapport à ce plan-là. Alors, on renvoie le vecteur $(1 \ 0 \ 0)$ à lui-même, parce que c'est dans le plan de symétrie. Après, le vecteur $(0 \ 1 \ 0)$ aussi à lui-même, parce que c'est encore dans le plan. Et le vecteur $(0 \ 0 \ 1)$ est envoyé à -1 fois lui-même, parce que ceci est envoyé en bas. Donc, voilà, ceci est la matrice de l'application. Et puis, on voit que la transposée est égale à elle-même. Ensuite, le produit de cette matrice avec elle-même est égal à l'identité. Donc, c'est bien une application orthogonale, ou bien une matrice orthogonale. On a que cette matrice inverse est égale à la transposée, est égale à la matrice. Et puis, enfin, un troisième exemple, où on ne voit pas forcément la géométrie. Je pose seulement une matrice.

Notes

Summary



13m 17s

Exemples : (1) Soit $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation de θ radians dans le sens trigonométrique.

Soit $\mathcal{C}$ la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{R}^2$.

$$[R_\theta]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad [R_\theta]_{\mathcal{C}}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } [R_\theta]_{\mathcal{C}} \cdot [R_\theta]_{\mathcal{C}}^T = I$$

(2) Soit $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $z=0$. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$[S]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [S]_{\mathcal{C}}^{-1} = [S]_{\mathcal{C}}^T = [S]_{\mathcal{C}}.$$



(3) Posons $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
Donc A est une matrice orthogonale.

10.2 Matrices orthogonales, équivalences



[voir écran] Maintenant, si on voulait déterminer si cette matrice-là est une matrice orthogonale ou non, on pourrait utiliser n'importe laquelle des conditions équivalentes et surtout, je peux faire les produits scalaires entre les colonnes de cette matrice pour voir si ça forme une base orthonormée. Donc, la norme de la première colonne, c'est $1/2 + 1/2 = 1$. La norme de la deuxième colonne, c'est 1. La norme de la troisième colonne aussi, c'est 1. Le produit scalaire entre la première et la deuxième, c'est 0. Entre la première et la troisième, c'est $-1/2 + 1/2 = 0$. Entre la deuxième et la troisième aussi. Donc, les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, donc, A est une matrice orthogonale. Voilà. Maintenant, on a plusieurs façons pour déterminer si une matrice donnée est une matrice orthogonale ou non.

Notes

Summary



15m 22s