



10.3 Changement de base orthogonal

Ici, nous retournons à la question de motivation que j'avais posée dans le paragraphe 10.0. Cette question c'était : Si j'ai une application linéaire d'un espace euclidien et si j'arrive à la diagonaliser, c'est-à-dire il existe une base de vecteurs propres dans cette application, est-ce que ce changement de base préserve la géométrie ? Est-ce que je peux la diagonaliser en préservant la géométrie de l'espace V ?

Notes

Summary



0m 03s

$T: V \rightarrow V$, V un espace euclidien. Soit C une base orthonormée de V .
 Supposons que V possède une base B telle que $[T]_B$ soit diagonale (ou sinon triangulaire).
 La base B est-elle une base orthonormée?



10.3 Changement de base orthogonal



Je rappelle la question, donc j'ai $T: V \rightarrow V$, V est un espace euclidien, et on suppose qu'il existe une bonne base pour T . Supposons que V possède une base B telle que la matrice de T par rapport à cette base-là soit diagonale. Ou, peut-être qu'on ne peut pas la diagonaliser mais on peut quand même la rendre sous une plus belle forme, par exemple, triangulaire. Alors, la question était est-ce que cette nouvelle base est aussi orthonormée? Donc, on a commencé avec un espace euclidien. Il existe une base orthonormée. Et puis, après, on cherche une base, disons de vecteurs propres. Et puis, on se demande si cette base là est aussi orthonormée? La base B est-elle une base orthonormée? Maintenant, si je commence avec une base orthonormée d'abord, donc soit C une base orthonormée de V . Ensuite j'ai cette nouvelle base par rapport à laquelle la matrice de T elle est jolie. Et puis, si je pose P , la matrice identité de B vers C , alors, on a que P^{-1} la matrice de T par rapport à C et P donc ça, c'est l'identité BC dans ce sens-là, la matrice de T par rapport à C , l'identité BC dans l'autre sens.

Notes

Summary



0m 31s

$T: V \rightarrow V$, V un espace euclidien. Soit C une base orthonormée de V . $\dim V = n$.

Supposons que V possède une base B telle que $[T]_B$ soit diagonale (ou sinon triangulaire).

La base B est-elle une base orthonormée?

Posons $P = [id]_{CB}$. On a $P^{-1}[T]_C P = [id]_{Bc} [T]_c [id]_{cB} = [T]_B$.

Si B est orthonormée, les colonnes de P forment une base orthonormée de l'espace $\mathbb{R}^n$.

Donc P est une matrice orthogonale.



10.3 Changement de base orthogonal

Je rappelle des choses du chapitre 8. Donc ça, c'est la matrice de T par rapport à B . C'est cette matrice-là qui est jolie, disons, diagonale. Donc, on a fait un changement de base pour rendre la matrice sous une forme plus convenable. Et puis, on se demande si cette base elle est aussi orthonormée. Si B est orthonormée, alors, ça veut dire que les colonnes de P forment une base orthonormée de l'espace. Parce qu'on a commencé avec une base orthonormée, on écrit la matrice de l'application par rapport à ces deux bases différentes, la matrice identité, donc ça envoie une base orthonormée vers une base orthonormée. Et les colonnes de cette matrice forment une base orthonormée de l'espace. Ça veut dire que P est une matrice orthogonale. (forment une base orthonormée de l'espace $\mathbb{R}^n$ donc, ici, la dimension de V est égale à n) Donc, on a écrit une matrice par rapport à, déjà, une base orthonormée fixe. Maintenant, on peut imaginer que la géométrie est juste la géométrie de $\mathbb{R}^n$ par rapport à la base canonique. On pose la matrice identité par rapport à ces deux bases orthonormées différentes. Et puis, cette matrice aura des colonnes qui forment une base orthonormée de l'espace par rapport au produit scalaire usuel.

Notes

Summary



2m 53s

Définition.

- (1) Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On dit que A est **orthogonalement diagonalisable** s'il existe une matrice orthogonale $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- (2) Soit V un espace euclidien et soit $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire. On dit que T est **orthogonalement diagonalisable** si V possède une base orthonormée formée de vecteurs propres de T .

Remarque : Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonalement diagonalisable. Donc il existe $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonale t.q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.

10.3 Changement de base orthogonal



Donc, ça, ça donne lieu à la définition suivante : Une matrice A , bon, on donne une définition en deux fois, d'abord pour une matrice, on dit qu'elle est orthogonalement diagonalisable s'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Sinon, on donne une définition analogue pour une application linéaire. Donc on a un espace euclidien et puis, on a une transformation linéaire de cet espace euclidien. On dit que T est orthogonalement diagonalisable si V possède une base orthonormée formée de vecteurs propres de T . Les deux définitions sont équivalentes quand on passe de T vers la matrice qui représente T par rapport à une base orthonormée de V . Je vais juste faire une remarque ici. Ensuite, je vais montrer une première proposition mais, d'abord, la remarque. Soit A une matrice $n \times n$ qui est orthogonalement diagonalisable. Donc, par la définition, il existe un P orthogonal tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Mais comme P est orthogonale, (ça, c'est si et seulement si) il existe donc un P orthogonal tel que P^TAP est diagonale.

Notes

Summary



4m 40s

Définition.

- (1) Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On dit que A est **orthogonalement diagonalisable** s'il existe une matrice orthogonale $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- (2) Soit V un espace euclidien et soit $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire. On dit que T est **orthogonalement diagonalisable** si V possède une base orthonormée formée de vecteurs propres de T .

Remarque : Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonalement diagonalisable. Dm il existe $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonale t.q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.
Dm P^TAP est diagonale.

10.3 Changement de base orthogonal



Donc, au lieu d'avoir l'inverse à gauche, on peut mettre simplement la transposée, c'est la même matrice parce qu'on a ici une matrice orthogonale. Donc ça, c'est déjà une première simplification du problème. Ensuite, je montre une proposition qui n'est pas difficile à voir mais c'est bon à remarquer.

Notes

Summary



6m 45s

Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonalement diagonalisable. Alors A est une matrice symétrique.

Preuve Soit $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, disons

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$$(P^TAP)^T = D^T = D = P^TAP$$

$$P^T A^T (P^T)^T = P^TAP$$

$$P^T A^T P = P^TAP$$

$$P P^T A^T P = P P^TAP$$

10.3 Changement de base orthogonal



C'est que je me donne une matrice qui est orthogonalement diagonalisable. Alors cette matrice est forcément symétrique. Vous verrez, la démonstration n'est pas difficile. Ça suit la remarque que je viens de faire. Soit P une matrice orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, disons que $P^{-1}AP$ est la matrice D qui est une matrice diagonale comme ça : $d_1, d_2, \dots, d_n$. Comme je viens de le remarquer, ceci est égal à P^TAP , grâce au fait que P est une matrice orthogonale. Maintenant, je fais la transposée des deux côtés de cette égalité. Je fais P^TAP , tout re-transposé. Puis, la transposée de la matrice D qui est simplement la matrice D car D est une matrice diagonale. Et ça, c'est de nouveau égal à P^TAP . Et maintenant, la transposée ici, de ce côté, j'ai les produits des transposées dans l'autre sens. Donc j'ai $P^T A^T (P^T)^T$ est égal à P^TAP . Et ce côté-là devient $P^T A^T P$ est égal à P^TAP . Maintenant, multiplions à gauche par P . Ça, c'est la matrice identité.

Notes

Summary



Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonalement diagonalisable. Alors A est une matrice symétrique.

Preuve Soit $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $P^{-1}AP$ sont diagonals, disons

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

P^TAP

$$(P^TAP)^T = D^T = D = P^TAP$$

$$P^T A^T (P^T)^T = P^TAP$$

$$P^T A^T P = P^TAP$$

$$P P^T A^T P = P P^TAP$$

$$A^T P = AP$$

$$A^T P P^T = A P P^T$$

$$\underline{A^T} = A \Rightarrow A \text{ est symétrique.}$$

10.3 Changement de base orthogonal

Donc, j'ai $A^T P = AP$. Et maintenant, multiplions à droite par P^T . Ça, c'est aussi la matrice identité donc j'ai $A^T = A$. Et donc, par définition, A est une matrice symétrique. Donc, c'est vraiment le fait qu'on arrive à la diagonaliser en utilisant une matrice orthogonale. Ce qui est absolument étonnant et surprenant, c'est que cette condition qui est facile à montrer... Si on a une matrice qui est orthogonalement diagonalisable, elle est forcément symétrique, alors, la réciproque de cette proposition est aussi vraie. Ça veut dire que si j'ai une matrice symétrique, elle est orthogonalement diagonalisable. On en parlera dans la suite de ce chapitre.

Notes

Summary

