



10.4 Matrices symétriques, valeurs propres, vecteurs propres, théorème spectral

Dans la vidéo précédente, j'ai montré que si on a une matrice qui est orthogonalement diagonalisable, alors, cette matrice est forcément symétrique. Et je vous ai dit que la réciproque est aussi vraie. Maintenant, ça c'est le premier théorème de ce cours que nous ne pouvons pas montrer, ça s'appelle le théorème spectral donc c'est un des théorèmes spectraux. Mais je peux quand même faire une première étape de la démonstration pour vous montrer pourquoi c'est au moins un énoncé raisonnable.

Notes

Summary



0m 03s

Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, i.e. $A = A^T$. Alors deux vecteurs propres pour A de valeurs propres distinctes sont orthogonaux (produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$).

Preuve Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs propres pour A de valeurs propres λ, μ respectivement, $\lambda \neq \mu$



10.4 Matrices symétriques, valeurs propres, vecteurs propres, théorème spectral



Je vais donc commencer par vous montrer ça. Donc voilà, je me donne une matrice symétrique, donc égale à sa transposée. Si cette matrice a deux vecteurs propres de valeurs propres distinctes, alors, ces vecteurs sont forcément orthogonaux. Ici, par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. On a l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on a une matrice, qui a deux vecteurs propres de valeurs propres distinctes, c'est ça qui est important, alors ces deux vecteurs sont orthogonaux. Donc je donne la preuve. Alors, je prends deux vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ qui sont justement des vecteurs propres de valeurs propres distinctes pour la matrice A . Disons deux valeurs propres λ et μ , respectivement, avec λ différent de μ . Donc ça veut dire que si je fixe, disons la base canonique. Donc fixons C la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et posons X égale à la matrice de u où c'est le vecteur colonne qui représente u par rapport à cette base et Y la colonne qui représente v par rapport à cette base alors on a que $AX = \lambda X$ et $AY = \mu Y$.

Notes

Summary



0m 32s

Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, i.e. $A = A^T$. Alors deux vecteurs propres pour A de valeurs propres distinctes sont orthogonaux (produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$).

Preuve Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs propres pour A de valeurs propres λ, μ respectivement, $\lambda \neq \mu$.
 Fixons C la base canonique de $\mathbb{R}^n$, posons $X = [u]_C$, $Y = [v]_C$. On a
 $AX = \lambda X$ et $AY = \mu Y$.
 $\langle \lambda X, Y \rangle = \langle AX, Y \rangle = (AX)^T \cdot Y = X^T A^T Y \stackrel{A=A^T}{=} X^T AY = \langle X, AY \rangle = \langle X, \mu Y \rangle = \mu \langle X, Y \rangle$

10.4 Matrices symétriques, valeurs propres, vecteurs propres, théorème spectral



Bon maintenant, j'ai envie de montrer que X est orthogonale à Y . Donc je fais le produit scalaire de AX avec Y . Maintenant, ceci est égal à $\langle \lambda X, Y \rangle$. Et comme c'est un produit scalaire, je peux sortir le λ et c'est $\lambda \langle X, Y \rangle$. Donc, ça c'est un côté. Mais de l'autre côté je sais que je peux faire ce calcul-là, comme une multiplication de matrice. Donc je prends le vecteur colonne AX , je fais la transposée, et je fais le produit matriciel avec Y . Et puis, ceci est la même chose que $X^T A^T Y$ et il faut bien que j'utilise quelque part que la matrice A est symétrique donc cette égalité-là, ça utilise l'hypothèse ici $A = A^T$, donc c'est important que je l'utilise parce que ce n'est pas du tout vrai sinon. Donc ici j'ai $X^T AY$ et donc, de nouveau, j'ai la transposée d'un vecteur, donc produit avec un autre, donc ça c'est la même chose que le produit scalaire entre X et AY . Maintenant $AY = \mu Y$. Donc ici j'ai le produit scalaire $\langle X, \mu Y \rangle$. Le produit scalaire est linéaire dans les deux coordonnées donc j'ai $\mu \langle X, Y \rangle$. Donc, du coup, j'ai $\lambda \langle X, Y \rangle = \mu \langle X, Y \rangle$, donc on a $(\lambda - \mu) \langle X, Y \rangle = 0$.

Notes

Summary



Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, i.e. $A = A^T$. Alors deux vecteurs propres pour A de valeurs propres distinctes sont orthogonaux (produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$).

Preuve Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs propres pour A de valeurs propres λ, μ respectivement, $\lambda \neq \mu$.
 Fixons C la base canonique de $\mathbb{R}^n$, posons $X = [u]_C$, $Y = [v]_C$. On a
 $AX = \lambda X$ et $AY = \mu Y$.
 $\langle \lambda X, Y \rangle = \langle AX, Y \rangle = (AX)^T \cdot Y = X^T A^T Y \stackrel{A=A^T}{=} X^T AY = \langle X, AY \rangle = \langle X, \mu Y \rangle = \mu \langle X, Y \rangle$.
 " $\lambda \langle X, Y \rangle$
 $(\lambda - \mu) \langle X, Y \rangle = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, $\lambda - \mu \neq 0$ et donc $\langle X, Y \rangle = 0$.
 Donc u est orthogonal à v . $\square$

10.4 Matrices symétriques, valeurs propres, vecteurs propres, théorème spectral



Mais on a supposé que λ est différent de μ . Donc comme λ est différent de μ , on a que $\lambda - \mu$ n'est pas égale à zéro. Et donc, dans ce produit-là, c'est le nombre $\langle X, Y \rangle$ qui est égal à zéro. Et c'est exactement ce qu'on voulait montrer. Donc on voulait montrer que les vecteurs propres, pour des valeurs propres distinctes, donc le X et le Y , ça, ça représente le u et le v , sont des vecteurs qui sont orthogonaux. Donc u est orthogonal à v . C'est la preuve. Puis ça c'est la première étape de la démonstration du théorème suivant.

Notes

Summary



4m 01s

On a vu que $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonalement diagonalisable est nécessairement symétrique.

(théorème spectral)

Théorème. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors il existe $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonale t.q. $P^T A P$ soit diagonale, i.e. A est orthogonalement diagonalisable.

Sans preuve.



10.4 Matrices symétriques, valeurs propres, vecteurs propres, théorème spectral

Donc ici, on avait, on a déjà vu que A , une matrice orthogonalement diagonalisable et nécessairement symétrique; et ici, on a un théorème qui est un des théorèmes spectraux donc, théorème spectral, Il y a aussi un théorème spectral dans le cas des espaces hermitiens, ici on travaille avec les espaces euclidiens, donc on se donne une matrice symétrique, alors il existe une matrice B orthogonale tel que ceci soit diagonale, c'est-à-dire que cette matrice symétrique est orthogonalement diagonalisable. Donc comme j'ai dit, c'est le premier théorème de ce cours que nous ne pouvons pas démontrer parce qu'il nous manque un tout petit peu une sortie des espaces définis sur $\mathbb{R}$. On devrait étudier les espaces vectoriels où les scalaires sont repris dans le corps des nombres complexes. On en a déjà parlé un tout petit peu dans le chapitre 8. Si on refait la théorie, il n'y a pas beaucoup de choses qui changent, mais ce théorème-là, on ne peut le montrer que dans le contexte des espaces vectoriels sur les complexes. Mais c'est quand même un théorème très étonnant, parce que c'est un critère très simple. On regarde une matrice, elle est symétrique, alors on sait qu'on peut la diagonaliser orthogonalement. Donc sans preuve, malheureusement.

Notes

Summary



4m 46s

Remarques ① $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est orthogonalement diagonalisable $\Leftrightarrow$
 A est symétrique.

②



10.4 Matrices symétriques, valeurs propres, vecteurs propres, théorème spectral



Notes

Je vais faire quelques remarques. Bon, je vais juste d'abord faire la remarque de redire le théorème. Donc A une matrice de taille $m \times n$ est orthogonalement diagonalisable si et seulement si elle est symétrique. Donc ça c'est vraiment le contenu du théorème. Il y a une direction que nous avons pu montrer qui n'était pas difficile et l'autre direction que nous n'avons pas pu montrer, mais on va l'utiliser. Donc une matrice est orthogonalement diagonalisable si et seulement si cette matrice est symétrique. Donc il est très facile de déterminer si une matrice est orthogonalement diagonalisable ou non, ce qui n'était pas du tout le cas avec la diagonalisation simple. Maintenant deuxième : Ça veut dire quoi qu'on peut la diagonaliser orthogonalement ? Ça veut dire qu'il existe une base de vecteurs propres. Donc ça veut dire qu'on peut factoriser le polynôme caractéristique en facteurs linéaires. Donc si A est symétrique, on peut factoriser le polynôme caractéristique de A en un produit de facteurs linéaires.

Summary



6m 23s

Remarque ① $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est orthogonalement diagonalisable $\Leftrightarrow$
 A est symétrique.

② Si A est symétrique, on peut factoriser $c_A(t)$ en un produit de facteurs linéaires. C'est-à-dire toutes les racines de l'équation $c_A(t) = 0$ sont réelles, aucune racine complexe.

③ Si A est symétrique, pour chaque valeur propre λ de A , la dimension de l'espace propre E_λ est égale à la multiplicité algébrique de λ (comme racine de $c_A(t)$).

10.4 Matrices symétriques, valeurs propres, vecteurs propres, théorème spectral



Maintenant, il n'est peut-être pas facile de faire la factorisation parce qu'on sait qu'il est parfois difficile de factoriser des polynômes mais on est sûr que toutes les racines sont des valeurs réelles, donc, c'est-à-dire ici, toutes les racines de l'équation $c_A(t) = 0$ sont des nombres réels.

Donc il n'y a aucune racine complexe. Ça c'est déjà surprenant aussi. Une matrice symétrique, on sait forcément qu'il y a pas de racine complexe. Et puis troisième : Donc on se rappelle de nouveau ce que veut dire être diagonalisable : ça veut dire que, pour chaque valeur propre, la dimension de l'espace propre est égale à la multiplicité algébrique de cette valeur propre. Donc, si A est symétrique, pour chaque valeur propre λ de A , la dimension de l'espace propre E_λ est égale à la multiplicité algébrique de λ comme racine du polynôme caractéristique. Donc ça aussi c'est surprenant. Il suffit que la matrice soit symétrique, ensuite on est sûr qu'on peut factoriser complètement sur $\mathbb{R}$ et puis que pour chaque racine du polynôme caractéristique, donc pour chaque valeur propre, la multiplicité géométrique sera égale à la multiplicité algébrique de cette racine. Et maintenant, dans la prochaine vidéo, enfin, nous allons calculer.

Notes

Summary



7m 57s