



10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une m

Dans ce chapitre nous avons vu beaucoup de théorie, j'ai commencé par cette question de motivation à vouloir diagonaliser une matrice ou bien une application en préservant la géométrie, quand c'est possible. Après nous avons formalisé cette notion en posant la définition d'une matrice orthogonale, on a des critères pour déterminer si une matrice est orthogonale ou non; et puis enfin on est arrivés à ce théorème surprenant, impressionnant, qui dit qu'une matrice est orthogonalement diagonalisable, c'est-à-dire qu'on peut la diagonaliser en préservant la géométrie, si et seulement si elle est symétrique. Et puis maintenant enfin, j'arrive à la partie où on peut calculer et appliquer ces théorèmes et je commence par donner une méthode, la marche à suivre, pour diagonaliser orthogonalement une matrice symétrique.

Notes

Summary



0m 03s

Méthode. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ symétrique. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. ^{polynôme} (produit scalaire usuel).

- (1) Cherchons le polynôme caractéristique $c_A(t)$.
- (2) Trouver toutes les racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ de $c_A(t)$ t.q.
 $c_A(t) = \pm(t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_r)^{m_r}$.
- (3) Pour chaque i , trouver une base $\mathcal{B}_i$ de E_{λ_i} .
- (4) On sait que pour $v \in \mathcal{B}_i, w \in \mathcal{B}_j, i \neq j, v \cdot w = 0$.
- (5) Pour chaque i , utiliser Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormée $\mathcal{B}'_i$ de E_{λ_i} .
- (6) $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}'_r$ est une base orthonormée de V .
- (7) $P = [\text{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}$ est orthogonale et $P^T A P = P^{-1} A P$ est diagonale.

10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale



Donc je me donne une matrice symétrique. On peut aussi imaginer que nous avons commencé avec une application linéaire et on a posé la matrice de cette application linéaire dans un espace euclidien, par rapport à une base orthonormée, et que la matrice est symétrique. Donc je me donne une matrice symétrique et la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Donc je souligne ici que c'est une base orthonormée. Donc on travaille avec le produit scalaire usuel. D'abord il faut trouver le polynôme caractéristique de la matrice, on ne peut pas échapper à ça. Ensuite il faut chercher toutes les racines distinctes. Donc maintenant on sait que l'on peut le factoriser en facteurs linéaires. Toutes les racines sont des valeurs réelles. Et puis chacune a une multiplicité algébrique. Ensuite pour chaque i on va chercher une base de l'espace propre associé, on sait que la dimension de cet espace propre, donc je souligne ici, par le théorème spectral, la dimension de cet espace-là sera égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre.

Notes

Summary



0m 55s

Méthode. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ symétrique. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. ^{orthonormée.} (produit scalaire usuel).

- (1) Cherchons le polynôme caractéristique $c_A(t)$.
- (2) Trouver toutes les racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ de $c_A(t)$ t.q.
 $c_A(t) = \pm(t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_r)^{m_r}$.
- (3) Pour chaque i , trouver une base $\mathcal{B}_i$ de E_{λ_i} . ($\dim E_{\lambda_i} = m_i$)
- (4) On sait que pour $v \in \mathcal{B}_i, w \in \mathcal{B}_j, i \neq j, v \cdot w = 0$.
- (5) Pour chaque i , utiliser Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormée $\mathcal{B}'_i$ de E_{λ_i} .
- (6) $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}'_r$ est une base orthonormée de V .
- (7) $P = [\text{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}$ est orthogonale et $P^T A P = P^{-1} A P$ est diagonale.

10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale



Ensuite on a quand même pu démontrer une petite étape du théorème c'est que si on prend un vecteur dans la base de l'espace propre de la valeur propre λ_i et un vecteur dans la base de l'espace propre pour la valeur propre λ_j , si i est différent de j , on a des valeurs propres distinctes, alors ces deux vecteurs sont orthogonaux. Donc on sait que les espaces propres correspondants sont orthogonaux. Ensuite pour chaque i , cette base-là, elle n'est peut-être pas orthonormée, mais je peux utiliser Gram-Schmidt pour la transformer en une base orthonormée. Ensuite, je les mets toutes ensemble ces bases et puis ça, ça serait la base orthonormée, formée de vecteurs propres pour l'application, pour la matrice A . Et donc si je pose la matrice de passage, de changement de base, alors quand je fais le changement de base, la représentation de A par rapport à cette nouvelle base, ça sera une matrice diagonale. Donc ça, c'est la marche à suivre. Alors appliquons ça à un exemple.

Notes

Summary



2m 07s

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. On a $c_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5-t & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6-t \end{pmatrix}$.

$$c_A(t) = (6-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 & 4 \\ -2 & 5-t & 2 \\ 4 & 2 & 2-t \end{pmatrix} = (6-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 & 4 \\ -2 & 5-t & 2 \\ -2 & 5-t & 2 \end{pmatrix}$$

10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale

Voilà, je me donne une matrice A. Elle est effectivement symétrique, égale à sa transposée, ensuite, la première étape c'était de calculer le polynôme caractéristique, mais ici je vois qu'il y a une faute de frappe, donc $c_A(t)$. Je dois calculer le déterminant de $A - t$ fois l'identité, ce qui est égal à ça. D'abord j'utilise la dernière ligne, donc j'ai $6 - t$ fois le déterminant de la matrice que j'obtiens quand je supprime la quatrième ligne et la quatrième colonne. [voir écran] Ensuite je vais introduire un zéro ici, je vais additionner à la dernière ligne 2 fois la deuxième, donc je vais ici additionner, en multipliant par 2. On se rappelle que ça ne change pas le déterminant cette opération élémentaire sur les lignes. Donc c'est $6 - t$ fois le déterminant de la matrice 3×3 . Donc la première ligne et la deuxième ne vont pas changer. Donc maintenant je fais deux fois cette ligne que j'additionne en bas donc j'ai $-4 + 4 = 0$ j'ai $10 - 2t + 2$ donc c'est $12 - 2t$, ensuite $4 + 2 - t$ donc $6 - t$.

Notes

Summary



3m 07s

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. On a $c_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5-t & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6-t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} c_A(t) &= (6-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 & 4 \\ -2 & 5-t & 2 \\ 4 & 2 & 2-t \end{pmatrix} = (6-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 & 4 \\ -2 & 5-t & 2 \\ 0 & 12-2t & 6-t \end{pmatrix} \\ &= (6-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & -10 & 4 \\ -2 & 1-t & 2 \\ 0 & 0 & 6-t \end{pmatrix} = (6-t)^2 \det \begin{pmatrix} 2-t & -10 \\ -2 & 1-t \end{pmatrix} = (t-6)^3(t+3). \end{aligned}$$

Deux valeurs propres: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6$.

10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale



Et ensuite je vais encore réintroduire un zéro dans la troisième ligne ici cette fois je vais faire une opération sur les colonnes donc cette fois je vais additionner ici - 2 fois la troisième colonne que j'additionne à la deuxième colonne. Donc ceci est égal à 6 - t fois le déterminant de la matrice donc cette fois c'est une opération sur les colonnes, donc la première colonne ne va pas changer, la troisième non plus. Donc je fais -2 fois cette colonne, que j'additionne ici. Donc ça fait - 8 + (- 2) donc - 10, - 4 + 5 - t donc 1 - t, et ici - 12 + 2t donc ça donne zéro. C'était l'idée. Maintenant je développe le long de la troisième ligne. Donc j'ai (6 - t)² fois le déterminant de la matrice 2 x 2 [voir écran] et puis je vous laisse terminer le calcul et vous allez obtenir (t - 6)³(t + 3). Donc on a factorisé en facteurs linéaires. Les deux valeurs propres distinctes: $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 6$. Bon le - 3, il n'y a que multiplicité 1 donc je vais trouver un espace propre de dimension 1, donc je vais déjà faire le calcul.

Notes

Summary



Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. On a $c_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5-t & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6-t \end{pmatrix}$.

$$c_A(t) = (6-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 & 4 \\ -2 & 5-t & 2 \\ 4 & 2 & 2-t \end{pmatrix} \stackrel{\times 2}{=} (6-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 & 4 \\ -2 & 5-t & 2 \\ 0 & 12-2t & 6-t \end{pmatrix}$$

$$= (6-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & -10 & 4 \\ -2 & 1-t & 2 \\ 0 & 0 & 6-t \end{pmatrix} = (6-t)^2 \det \begin{pmatrix} 2-t & -10 \\ -2 & 1-t \end{pmatrix} = (t-6)^3(t+3) \quad \text{Deux valeurs propres: } \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6.$$

Base de E_{-3} : $E_{-3} = \ker(A+3I)$, $A+3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & 9 & 0 \\ 0 & 18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_{-3} = \{ (\quad , 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$ ↑
variable libre.

10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale



Donc une base de l'espace E_{-3} . Donc je dois calculer le noyau; donc E_{-3} est le noyau de $A + 3$ fois l'identité. Donc $A + 3$ fois l'identité est égal à la matrice, donc j'additionne 3 ici, j'ai [voir écran], et puis je peux vite l'échelonner. Donc je vais diviser cette ligne-là par 2 et la mets en haut. Donc j'ai $(-1 \ 4 \ 1 \ 0)$ et ensuite je vais l'utiliser pour éliminer dans la première colonne. Donc 5 fois cette ligne que j'additionne ici, donc j'ai... $(0 \ 18 \ 9 \ 0)$ ensuite je vais multiplier par 4 que j'additionne là, $(0 \ 18 \ 9 \ 0)$ et la dernière ligne. Et puis on arrive rapidement à une forme échelonnée. Donc j'ai [voir écran], et puis une ligne de zéros. Et donc on voit que la dernière coordonnée ça va donner zéro, mais ici j'ai pivot, pivot, pivot donc c'est celui-là qui est une variable libre. Donc si je pose ça en tant que la variable α , alors j'aurai E_{-3} est égal à l'ensemble des vecteurs, $(\alpha \text{ un nombre réel})$. Donc la dernière coordonnée doit être égale à zéro. L'avant-dernière, je la pose égale à α .

Notes

Summary



Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. On a $c_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5-t & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6-t \end{pmatrix}$.

$$c_A(t) = (6-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 & 4 \\ -2 & 5-t & 2 \\ 4 & 2 & 2-t \end{pmatrix} \stackrel{\times 2}{=} (6-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & -2 & 4 \\ -2 & 5-t & 2 \\ 0 & 12-2t & 6-t \end{pmatrix}$$

$$= (6-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & -10 & 4 \\ -2 & 1-t & 2 \\ 0 & 0 & 6-t \end{pmatrix} = (6-t)^2 \det \begin{pmatrix} 2-t & -10 \\ -2 & 1-t \end{pmatrix} = (t-6)^3(t+3) \quad \text{Deux valeurs propres: } \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6.$$

Base de E_{-3} : $E_{-3} = \ker(A+3I)$, $A+3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & 9 & 0 \\ 0 & 18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_{-3} = \{(-\alpha, -\frac{1}{2}\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
 base de $E_{-3} = ((-2, -1, 2, 0))$.

$-x_1 + 4(-\frac{1}{2}\alpha) + \alpha = 0$
 $-x_1 = \alpha$
 $x_1 = -\alpha$

↑
Variable libre.

10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale



Ensuite je trouve que 2 fois cette variable plus α est égal à zéro, donc cette coordonnée devient $-1/2 \alpha$. Et ici je vais trouver, je vais faire un calcul, j'ai $-x_1 + 4(-1/2\alpha) + \alpha = 0$. Donc j'ai $-x_1 = \alpha$. Donc j'ai $-\alpha$ ici. Donc je pourrai prendre une base de E_{-3} et je poserai $\alpha = 2$, par exemple, donc j'aurai $(-2, -1, 2, 0)$ On reprend cette information plus tard. Et puis maintenant je dois m'occuper de l'espace propre pour la valeur propre 6.

Notes

Summary



8m 02s

Rappel. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Donc $A - 6I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A - 6I$ est ligne équivalente à $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $E_6 = \{ (\quad , \gamma , \beta , \alpha) \}$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 3 variables libres.
 $\gamma \quad \beta \quad \alpha$



10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale

Donc ici on avait la matrice, pour l'espace propre, pour la valeur propre 6 je dois calculer le noyau de $A - 6$ fois l'identité. Je vais échelonner la matrice. Donc $A - 6$ fois l'identité est ligne équivalente à : donc je vais mettre cette deuxième ligne en haut, ensuite je vais l'utiliser pour échelonner. Donc je multiplie par -2, j'ajoute ici à la première ligne, donc j'ai 0, 0, 0, 0. Ensuite je multiplie par 2 que j'ajoute ici donc j'ai 0, 0, 0, 0 et ensuite 0, 0, 0, 0. Elle est échelonnée. Ici cette fois j'ai trois paramètres, trois variables libres, parce que j'ai un seul pivot, on s'y attendait, parce que par le théorème spectral on sait que, la multiplicité géométrique de la valeur propre 6 doit être égale à 3 qui était la multiplicité algébrique. Posons ici les variables libres α, β, γ . Alors j'aurai que l'espace propre pour la valeur propre 6 est égal à l'ensemble des vecteurs. Alors ici j'ai $\gamma \beta \alpha$ et puis dans la première couronnée j'ai... $-2x_1 - \gamma + 2\beta = 0$, donc $x_1 = -1/2\gamma + \beta$.

Notes

Summary



8m 49s

Rappel. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Donc $A - 6I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A - 6I \text{ est l'op. équivalente à } \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

base de $E_6 = ((0, 0, 0, 1)_{v_1}, (1, 0, 1, 0)_{v_2}, (-1, 1, 0, 0)_{v_3})$.

Base ortonormal de E_6 : $w_1 = v_1$
 $w_2 = v_2 - v_1$

10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale

Donc du coup je peux trouver une base de E_6 donc je prends $\alpha = 1$ et les autres 0 j'ai $(0,0,0,1)$ ensuite je prends $\beta = 1$ et les deux autres 0 et j'obtiens $(1,0,1,0)$ et je prends $\gamma = 1$ et les autres 0 j'ai $(-1/2,1,0,0)$. Donc voilà, ça c'est une base de E_6 . Maintenant la prochaine étape c'était de trouver une base orthonormée de E_3 et E_6 . Comme je suis ici dans E_6 , je vais déjà travailler avec ça. Donc une base orthonormée de E_6 , je dois utiliser la procédure de Gram-Schmidt, donc si j'appelle ces vecteurs-là v_1, v_2, v_3 , je pose $w_1 = v_1$, je vais normaliser après, d'abord je trouve une base orthogonale. Je pose $w_2 = v_2$ moins la projection orthogonale de v_2 sur w_1 . donc $(v_2 \cdot w_1 / w_1 \cdot w_1)w_1$ Mais ça, c'est juste : $v_2 - (v_2 \cdot v_1 / v_1 \cdot v_1)v_1$ et ceci est égal, si on fait le produit scalaire de v_1 et v_2 , on trouve déjà zéro, donc ça, c'est juste v_2 , donc $w_2 = v_2$.

Notes

Summary



Rappel. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Donc $A - 6I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A - 6I$ est ligne équivalente à $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $E_6 = \{(-\frac{1}{2}\alpha + \beta, \alpha, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 3 variables libres
 $\alpha \quad \beta \quad \alpha$

$-2x_1 - \alpha + 2\beta = 0$
 $-2x_1 = \alpha - 2\beta$
 $x_1 = -\frac{1}{2}\alpha + \beta$

base de $E_6 = ((0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (-\frac{1}{2}, 1, 0, 0))$.

Base orthonormée de E_6 : $w_1 = v_1$
 $w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = v_2$; $\frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$
 $w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = v_3 - \frac{-1/2}{2}(1, 0, 1, 0) = (-\frac{1}{2}, 1, 0, 0) + \frac{1}{4}(1, 0, 1, 0)$
 $= (-\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}, 0)$.

10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale



Ensuite w_3 est égal donc là je prends $v_3 - (v_3 \cdot w_1 / w_1 \cdot w_1) w_1 - (v_3 \cdot w_2 / w_2 \cdot w_2) w_2$ et puis j'obtiens v_3 . Maintenant le produit scalaire de v_3 avec v_1 est égal à zéro donc ça, ça tombe, donc moins, et ensuite je fais le produit scalaire de v_3 avec w_2 qui était juste le v_2 , donc là j'ai effectivement une valeur, j'ai $-1/2$ divisé par w_2 produit scalaire avec lui-même donc ici $1 + 1$ donc 2 . Et ça, ça multiplie w_2 . Donc ça, ça donne $(-1/2, 1, 0, 0) + 1/4(1, 0, 1, 0)$ donc $(-1/4, 1, 1/4, 0)$ Donc maintenant j'ai une base orthogonale de E_6 , je dois encore la normaliser, c'est ce que je vais faire après. Donc ce vecteur-là est déjà de norme 1 . Ce vecteur là est de norme 2 . Donc je dois diviser par la racine carrée. Donc ici je peux rajouter ça. Donc si je fais v_2 sur sa norme, j'ai : $1/\sqrt{2}(1, 0, 1, 0)$. Le v_1 c'est déjà de norme 1 et je continue sur le prochain slide.

Notes

Summary



Une base orthonormée de E_6 est $\mathcal{B} = \left((0, 0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{1+1/8}}(-1/4, 1, 1/4, 0) \right)$.

base $E_3 = (-2, -1, 2, 0)$
 base orthonormée de $E_3 = \frac{1}{3}(-2, -1, 2, 0) = (-2/3, -1/3, 2/3, 0)$.



10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale

Donc une base orthonormée de E_6 , donc ça, c'est ce que j'ai déjà écrit. Et ici, si je fais la norme de ce vecteur-là, j'aurai $1/16 + 1 + 1/16$, ça fait $1/8 + 1$ et ça donne ça. Et puis si on simplifie cette fraction-là, on va trouver la racine carrée de 8 sur 3, c'est la valeur avec laquelle je vais travailler après. Ensuite on pose E_3 , on avait une base de E_3 qui était le vecteur $(-2, -1, 2, 0)$, donc il faut que je normalise. Donc une base orthonormée de E_3 serait, donc je dois faire $4 + 4 + 1$, la racine carrée, donc j'ai $1/3$ qui multiplie $(-2, -1, 2, 0)$ donc j'ai $(-2/3, -1/3, 2/3, 0)$. Avant de continuer, on pourrait faire quelques petits contrôles. Ici on pourrait déjà contrôler qu'on a une base orthonormée d'un espace, on va faire confiance que l'on a vraiment trouvé une base de E_6 , et ce vecteur est orthogonal à ce vecteur, ce vecteur est orthogonal à celui-là, ici je n'ai pas besoin de m'occuper des scalaires, j'ai $-1/4 + 0 + 1/4 + 0$, donc ça, c'est zéro. Ensuite je peux prendre ce vecteur-là et faire le produit scalaire avec chacun de ces vecteurs.

Notes

Summary



14m 10s

Une base orthonormée de E_6 est $\mathcal{B} = \left((0, 0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+1/8}}}(1/4, 1, 1/4, 0) \right)$.

base $E_3 = (-2, -1, 2, 0)$

base orthonormée de $E_3 = \frac{1}{3}(-2, -1, 2, 0) = (-2/3, -1/3, 2/3, 0)$.

Donc $((-2/3, -1/3, 2/3, 0), (0, 0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0), \frac{\sqrt{8}}{3}(-1/4, 1, 1/4, 0))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ (formée de vecteurs propres de A .)

10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale



Donc là ça donne zéro, là ça donne $-2 + 2$ et ici ça donne $1/2 - 1 + 1/2$, donc ça, c'est aussi zéro. Donc on contrôle que ça fait une base orthonormée. Donc si je mets tout ça ensemble, ce vecteur-là $(-2/3, -1/3, 2/3, 0)$ ensuite ces trois vecteurs, ça c'est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$, et formée de vecteurs propres de la matrice originale. Donc pour terminer cette diagonalisation orthogonale, on pose la matrice de changement de base, posons P , la matrice identité, donc si j'appelle ça la base B , j'ai B , C , donc ça veut dire que j'écris cette base en termes de la base canonique donc c'est déjà fait et j'écris ça dans les colonnes.

Notes

Summary



15m 44s

Une base orthonormée de E_6 est $\mathcal{B} = \left((0, 0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{1+1/8}}(-1/4, 1, 1/4, 0) \right)$.

base $E_3 = (-2, -1, 2, 0)$

base orthonormée de $E_3 = \frac{1}{3}(-2, -1, 2, 0) = (-2/3, -1/3, 2/3, 0)$.

Donc $\mathcal{B} = ((-2/3, -1/3, 2/3, 0), (0, 0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0), \frac{\sqrt{8}}{3}(-1/4, 1, 1/4, 0))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ (formée de vecteurs propres de A .)

Puis $P = [id]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/6 \\ -1/3 & 0 & 0 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2/3 & 0 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 4 & 0 & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On vérifie que $P^T A P = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3\sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 4 & 0 & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

10.5 Méthode: diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale



Donc j'ai, [voir écran] c'est dans les colonnes, puis ensuite, ici je simplifie un tout petit peu ces valeurs-là, vous pouvez vérifier que c'est juste, c'est [voir écran] et je vais mettre en évidence $1/6$ pour que ça simplifie les calculs qui suivent, et cette matrice devient: [voir écran] Enfin, on vérifie que si je fais $P^T A P$, quand je fais $P^T A P$, j'aurai un facteur devant de $1/36$ après la matrice est transposée P^T , [voir écran] et puis la matrice A que je vais vous rappeler: [voir écran], et la matrice P , $1/6$ je l'ai déjà mis devant, [voir écran], et puis vous vérifiez que ça donne, donc j'ai fait le produit j'ai calculé et je trouve: $-3, 6, 6, 6$ le long de la diagonale, autour les autres composantes de la matrice sont zéro. Donc on a diagonalisé la matrice et on l'a fait avec une matrice orthogonale. Voilà un grand exemple.

Notes

Summary

