



10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple

Dans cette vidéo, je vais faire une autre application du changement de bases orthogonal. Je vais me donner une rotation dans R^3 , par rapport à un axe de rotation qui n'est pas un des axes principaux de R^3 , et je souhaite trouver l'image d'un vecteur quelconque par rapport à cette rotation. Pour se faire, je vais faire un changement de bases, mais un changement de bases orthogonal. Donc vers une base orthonormée qui est une bonne base pour cette application linéaire, cette rotation. Et puis c'est ça qui va me permettre de trouver l'image d'un vecteur quelconque.

Notes

Summary



0m 03s

Soit $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la rotation ayant comme axe de rotation la droite $\{t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$ et angle θ . Trouver l'image d'un vecteur (a, b, c) par R . C la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On sait que par rapport à une certaine base B de $\mathbb{R}^3$, la matrice de R est égale à

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution On cherche cette base B et on utilise $P = [id]_{CB}$ pour trouver $[R]_C$.

10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple



Donc voilà, je me donne la rotation qui a comme axe la droite qui passe par le vecteur $(1, 1, 1)$ et l'origine. Puis je vais faire une rotation de d'angle θ . C'est clair qu'il y a deux sens d'orientation de cette rotation. Je vais expliquer dans quel sens je vais faire la rotation plus tard. Puis je souhaite trouver l'image d'un vecteur (a, b, c) par cette rotation. Maintenant, la solution va passer par le chemin suivant : Donc, on sait que par rapport à une certaine base de $\mathbb{R}^3$, la matrice de R est égale à la matrice d'une rotation comme suit : L'axe de rotation était un des axes principaux, en l'occurrence l'axe des z . Alors j'aurai ici l'axe de rotation fixe, et puis si j'avais comme base du plan orthogonal la base orthonormée usuelle, j'aurais $(\cos(\theta), -\sin(\theta))$ dans la première ligne, et $(\sin(\theta), \cos(\theta))$. Et ça c'est par rapport à une base qui est appropriée, qui est bien choisie pour cette rotation. Donc on cherche cette base. Solution : Donc on va lui donner un nom, une certaine base B , et on utilise la matrice de passage pour trouver R en termes de la base canonique. Donc ici on dit que C c'est la base canonique. Ok, je continue.

Notes

Summary

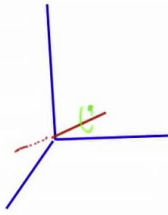


0m 40s

R rotation de θ , l'axe de rotation $D: \{t(1,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Plan orthogonal ^{passant par $(0,0,0)$.} à la droite D est le plan d'équation $x+y+z=0$.

R est une rotation dans le plan $x+y+z=0$, anti-horaire si le plan est vu du côté positif de la droite D .



10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple

Donc j'ai R , la rotation de θ , l'axe de rotation qui est la droite, qui est formée par tous les multiples du vecteur $(1,1,1)$. Maintenant, le plan orthogonal à cette droite, que nous notons D , est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Donc $(1,1,1)$ c'est un vecteur normal, et c'est un plan qui passe par l'origine. Donc le plan orthogonal passera par l'origine. Et puis maintenant, j'aimerais faire une rotation, dans ce plan, qui est antihoraire, si je regarde le plan depuis le vecteur (a, a, a) , donc là je vais faire un dessin. J'ai mes trois axes principaux là, et puis j'ai mon vecteur (a, a, a) , qui va de l'autre côté. Puis après quand je dis que je vais faire antihoraire, par rapport à quand je regarde le plan depuis le vecteur, ça veut dire que je regarde de ce côté-là, donc le plan il est là. Je regarde et puis je vais passer au dessus, dans ce sens-là. Maintenant on a dit, donc R est une rotation dans le plan $x + y + z = 0$, et c'est antihoraire si le plan est vu, depuis ici. Donc il faut se fier au dessin ici.

Notes

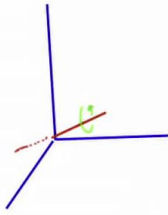
Summary



2m 29s

R rotation de θ , l'axe de rotation $D: \{t(1,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Plan orthogonal ∇ à la droite D passant par $(0,0,0)$. est le plan d'équation $x+y+z=0$.



R est une rotation dans le plan $x+y+z=0$, anti-horaire si le plan est vu du côté positif de la droite D .

Cherchons une base orthonormée du plan: base $(1,-1,0), (0,1,-1)$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$



10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple



Maintenant je cherche une base orthonormée du plan parce que je veux imiter ce que j'ai quand j'ai les trois axes principaux en $(0,0,0)$. Je veux donc avoir une base qui correspond à ça, mais par rapport à cette rotation. Donc je cherche une base orthonormée du plan. Bon d'abord, je cherche une base quelconque. Donc je prend une base, ça doit être deux vecteurs linéairement indépendants qui satisfont à ça. Je choisis : $(1,-1,0)$ et $(0,1,-1)$ Ensuite, posons w_1 est égal au premier vecteur, divisé par sa norme. Et ensuite, pour w_2 , je prends le deuxième vecteur, moins le produit scalaire de ce vecteur avec le premier, Ce qui donne [voir écran] Ensuite, donc ça c'est disons w'_2 , et pour w_2 je vais prendre ce vecteur divisé par sa norme, donc j'ai [voir écran] Donc je simplifie un petit peu et j'obtiens [voir écran] Donc j'ai une base orthonormée du plan, et ensuite j'aimerais que cette base soit positionnée de façon à ce que la matrice que j'avais écrit avant corresponde à l'action de la rotation sur la base de (w_1, w_2) .

Notes

Summary



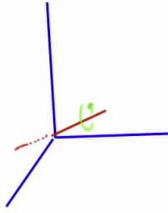
4m 03s

R rotation de θ , l'axe de rotation $D: \{t(1,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

passant par $(0,0,0)$.
Plan orthogonal $\perp$ à la droite D

est le plan d'équation $x+y+z=0$.

R est une rotation dans le plan $x+y+z=0$, anti-horaire si le plan est vu du côté positif de la droite D .

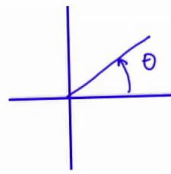
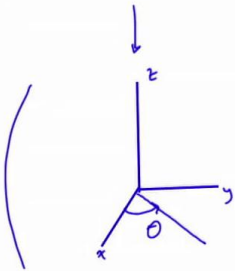


Cherchons une base orthonormée du plan: base $(1, -1, 0), (0, 1, -1)$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0)$$

$$w'_2 = (0, 1, -1) - \frac{1}{\sqrt{2}} (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0) = (0, 1, -1) + \frac{1}{2} (1, -1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 3, -2)$$



10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple

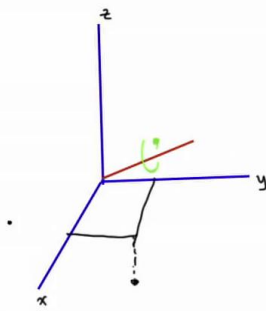


Donc maintenant si vous vous rappelez, ici il y a juste une question d'orientation qui est importante. J'ouvre une parenthèse ici. Donc si on se rappelle, ici on est dans le cas de : (je dessine les axes principaux) Puis si je regarde depuis côté-là, c'est antihoraire depuis ce côté. Donc ici, ça c'est (x, y, z) . Donc ça c'est l'axe de rotation, et je regarde en haut, donc c'est ce que je fais ici. Et si je fais antihoraire en regardant d'en haut, ça serait dans ce sens-ci. Donc ça c'est exactement le sens qu'on utilise, quand on écrit la matrice d'une rotation dans le plan $\mathbb{R}^2$. Quand on fait notre rotation usuelle, il va dans ce sens-là. Donc ici, en regardant d'en haut, si je vais dans le sens antihoraire, c'est une rotation dans ce sens-là. Donc c'est exactement la matrice que j'avais écrite avant, mais il faut bien que j'aie une base orthonormée du plan de rotation, où j'envoie le premier vecteur de la base vers la deuxième. Maintenant je dois encore refaire un dessin, pour voir où sont positionnés ces deux vecteurs, pour savoir si je mets d'abord w_1 et ensuite w_2 , ou le contraire.

Notes

Summary





base orthonormée du plan $x+y+z=0$
 $(w_1, w_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2) \right)$

10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple



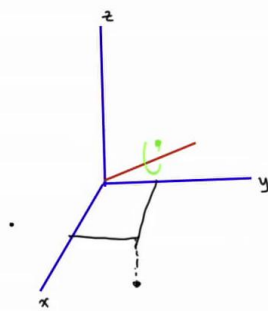
Donc je refais un dessin. Puis justement, j'ai le vecteur de rotation qui est là. Et j'ai ces deux vecteurs de la base orthonormée qui sont dans le plan de rotation, orthogonal à ces vecteurs-là. La base orthonormée du plan $x + y + z = 0$, donc ce que j'avais, c'est (w_1, w_2) , j'avais pris un sur racine carrée de deux fois le vecteur $(1, -1, 0)$. Et le deuxième, c'est un sur racine carrée de six, fois le vecteur $(1, 1, -2)$. J'aimerais voir où sont positionnés ces deux vecteurs, par rapport à la rotation qui devrait être antihoraire, donc dans ce sens-là, je redessine le sens. qui passait comme ça, et après derrière, donc antihoraire par rapport au plan-là quand je regarde dans ce sens-là. Donc si je positionne mes deux vecteurs, Si on note les axes x, y, z , le premier vecteur c'est : Le scalaire devant n'est pas important, donc ça c'est 1, et puis ensuite je vais dans ce sens-là, ce premier vecteur, il est là, dans le plan qui est (xy) . Puis ensuite, le deuxième c'est 1, puis 1 et ensuite on descend en bas. Puis je vais faire une rotation dans ce sens-là, ce vecteur-là, il va être envoyé sur ce vecteur-là.

Notes

Summary



7m 02s



base orthonormée du plan $x+y+z=0$

$$(w_1, w_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2) \right)$$

$$R: w_1 \rightarrow w_2$$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) \right)$$

$$[R]_B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

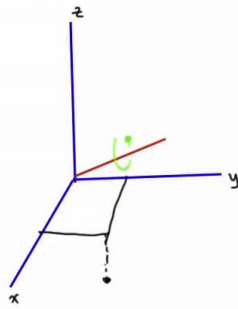
10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple

Notes

Et ça, c'est exactement comme ça que je vais positionner mes deux vecteurs, de la base, je vais envoyer le premier vers le deuxième. Donc ça c'est très bien. Donc la rotation R envoie w_1 dans la direction de w_2 . Donc maintenant, j'ai une bonne base, je vais prendre ici, un vecteur normalisé, pourquoi pas, un vecteur de norme un ici, ça serait facile. Ensuite là j'ai un vecteur de norme un, orthogonal à ce vecteur-là, qui est de norme un, j'envoie le premier vers le deuxième, donc je sais que pose la base B , d'être, donc dans ce sens-là, [voir écran] Et ensuite je normalise le vecteur qui est normal au plan, donc un sur racine carrée de trois fois le vecteur $(1,1,1)$. Et je sais que R par rapport à cette base-là est effectivement la matrice d'une rotation usuelle. En effet, on fait la rotation dans le plan orthogonal au vecteur qui est l'axe de rotation, et ensuite on fixe l'axe de rotation, ça c'est le troisième vecteur. Donc ça c'est comme ça, on connaît la matrice de la rotation par rapport à cette base-là, mais après il y a tout le travail de faire le changement de base. Donc on a C , la base canonique.

Summary





base orthonormée du plan $x+y+z=0$

$$(w_1, w_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2) \right)$$

$$R: w_1 \rightarrow w_2$$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) \right)$$

$$[R]_B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (e_1, e_2, e_3), \quad [id]_{CB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad [id]_{CB} \text{ est orthogonale}$$



10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple

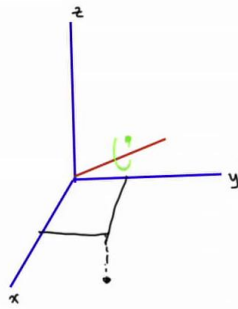
Et puis je vais poser la matrice de passage de la base B vers la base C . Puis ça c'est justement la matrice, où j'écris les vecteurs de la base B , par rapport à la base canonique, mais c'est déjà fait. Donc j'ai [voir écran]. Maintenant, je vais juste vous faire remarquer une chose, c'était important ici de choisir une base orthonormée du plan de rotation, pour avoir à la fin cette petite matrice deux fois deux. Par contre ce n'était pas important d'avoir ici un vecteur de norme un. Pour avoir ici $0,0,1$, il suffit d'avoir un vecteur qui est dans l'axe de rotation. Mais ce que j'aimerais avoir à la fin, c'est une matrice de passage, qui est orthogonale parce qu'après c'est beaucoup plus facile de calculer son inverse. Donc ça c'est une matrice qui est orthogonale, parce que les colonnes forment une base orthonormée de l'espace. Et donc, je sais que son inverse est juste la matrice transposée. Donc ici, comme B est une base orthonormée, cette matrice-là est une matrice orthogonale. Et donc, son inverse, dont j'aurai besoin, l'inverse de cette matrice, qui est l'autre matrice de passage, est simplement la transposée de la matrice.

Notes

Summary



9m 56s



base orthonormée du plan $x+y+z=0$

$$(w_1, w_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2) \right)$$

$$R: w_1 \rightarrow w_2$$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) \right)$$

$$[R]_B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (e_1, e_2, e_3)$$

$$[id]_{CB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$[id]_{CB}$ est orthogonale et donc

$$[id]_{BC} = ([id]_{CB})^T$$

$$[R]_C = [id]_{CB} [R]_B [id]_{BC}$$



10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple

Donc c'est beaucoup plus facile, c'était vraiment une très bonne idée, de mettre ici un vecteur normalisé, pour le troisième vecteur de base. Enfin, je fais un calcul. Donc je sais que la matrice de R , par rapport à la base C , parce que le but c'était de calculer l'image d'un vecteur quelconque par rapport à la base C . J'ai deux options, mais une façon de calculer ça, ce serait de vraiment travailler avec cette matrice. Et donc je ferais une énorme multiplication de matrices. Donc je mets ici l'identité par rapport aux bases C et B , la rotation R par rapport aux bases B qui est jolie, ou plutôt connue, ce n'est pas si joli mais c'est connu. Ensuite, l'identité dans l'autre sens là, donc par rapport aux bases CB . Donc c'est ça que je reprends ici.

Notes

Summary



11m 23s

$$\text{On a } [id]_{CB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } [R]_C &= [id]_{CB}[R]_B[id]_{BC} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$R_{(a,b,c)} : [R]_C \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ?$$

10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple

Donc voilà, on a la matrice de passage. Après je vais la réécrire en mettant en évidence un sur racine carrée de six. Ensuite ce que j'ai écrit ici, c'est la transposée. Donc ça, c'est la transposée, c'est l'inverse. Et puis après on fait un grand calcul ici, puis ensuite on peut calculer que $[R]_C$, donc R appliquée à (a, b, c) se trouve comme suit : C'est que je fais la multiplication de cette matrice-là qui est une grande matrice compliquée, et puis je trouve un formule pour l'application. La formule est assez terrible, vous allez voir. Vous pouvez imaginer quand vous voyez ça.

Notes

Summary



12m 09s

Soit $s = a + b + c$, on a

$$R(a, b, c) =$$

$$\frac{1}{3}((2a - b - c)\cos \theta + \sqrt{3}(c - b)\sin \theta + s, (-a + 2b - c)\cos \theta + \sqrt{3}(a - c)\sin \theta + s, \sqrt{3}(b - a)\sin \theta - (a + b - 2c)\cos \theta + s)$$

quelques petites vérifications: $R(1,1,1) = \frac{1}{3}(3,3,3) = (1,1,1)$

R1

10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple



La formule est très compliquée, je vois qu'ici il fallait un tiers, là. Donc elle est très compliquée, elle est là, j'ai fait le calcul. C'est ce que j'ai trouvé. Après on peut se demander si c'est une formule raisonnable, si ça donne des valeurs attendues, quand on l'applique à certains vecteurs. Donc juste quelques petites vérifications, pour voir si c'est une matrice raisonnable, si on a une réponse raisonnable. Donc par exemple, si je l'applique au vecteur $(1,1,1)$ alors j'obtiens un tiers, et ensuite, donc ça c'est zéro, ça c'est zéro, le s ici c'est trois, ensuite, ça c'est zéro, ça c'est zéro, le s ici c'est trois, ça c'est zéro et ça c'est zéro et le s c'est trois, donc j'obtiens effectivement $(1,1,1)$, et ça c'est attendu parce que c'est l'axe de rotation, donc quand on fait une rotation, l'axe de rotation ne bouge pas. Très bien. Maintenant je vais prendre un autre vecteur, mais qui est dans le plan. Un vecteur un peu quelconque, donc je prends, je sais pas, par exemple $(1,-1,0)$. Voilà, un vecteur qui est dans le plan, et puis j'applique R et j'obtiens un tiers, et maintenant je fais attention.

Notes

Summary



12m 50s

Soit $s = a + b + c$, on a

$$R(a, b, c) =$$

$$\frac{1}{3}((2a - b - c)\cos \theta + \sqrt{3}(c - b)\sin \theta + s, (-a + 2b - c)\cos \theta + \sqrt{3}(a - c)\sin \theta + s, \sqrt{3}(b - a)\sin \theta - (a + b - 2c)\cos \theta + s)$$

quelques petites vérifications: $R(1, 1, 1) = \frac{1}{3}(3, 3, 3) = (1, 1, 1)$

$$R(1, -1, 0) = \frac{1}{3}(3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta, -3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta, -2\sqrt{3}\sin\theta) \in \text{plan } x+y+z=0.$$

$$(1, -1, 0) \in \text{plan } x+y+z=0$$

10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple



Là j'aurai trois fois le cosinus de θ Ensuite j'aurai plus racine carrée de trois fois $\cos(\theta)$ Bon plus s qui est zéro parce qu'on est dans le plan. Ça c'est la première coordonnée. Ensuite j'aurai moins trois fois le cosinus θ , et ensuite, plus racine carrée de trois fois $\sin(\theta)$, puis S est toujours zéro. Ici, $b - a = 2$, donc j'ai moins deux fois racine carrée de trois fois $\sin(\theta)$, et là j'ai $a + b = 0$, et c qui est zéro. Donc voilà, ça c'est un vecteur qui est dans le plan, donc le vecteur $(1, -1, 0)$, est dans le plan $x + y + z = 0$. Et donc quand on fait cette rotation, on devrait trouver un autre vecteur qui est dans le plan. Et puis ici, pour être dans le plan, il faut que la somme des trois coordonnées soit égale à zéro. Donc ici on vérifie, on fait la somme. Là les cosinus tombent, donc j'ai deux racine carrée de trois fois sinus, qui tombent avec la troisième coordonnée. Donc ça c'est effectivement un vecteur qui est dans le plan. Et on peut continuer, on peut faire d'autres petites vérifications.

Notes

Summary



14m 09s

Soit $s = a + b + c$, on a

$$R(a, b, c) =$$

$$\frac{1}{3}((2a - b - c)\cos \theta + \sqrt{3}(c - b)\sin \theta + s, (-a + 2b - c)\cos \theta + \sqrt{3}(a - c)\sin \theta + s, \sqrt{3}(b - a)\sin \theta - (a + b - 2c)\cos \theta + s)$$

quelques petites vérifications: $R(1, 1, 1) = \frac{1}{3}(3, 3, 3) = (1, 1, 1)$

$$R(1, -1, 0) = \frac{1}{3}(3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta, -3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta, -2\sqrt{3}\sin\theta) \in \text{plan } x+y+z=0.$$

$$(1, -1, 0) \in \text{plan } x+y+z=0$$



10.6 Un changement de base pour une rotation: exemple

Bon, je ne prétends pas que cette formule soit jolie, mais c'est quand même une formule très concrète, pour cette question que je me donne une rotation, par rapport à un axe de rotation qui n'est pas un des axes principaux, et puis je peux quand même calculer l'inverse, l'image d'un vecteur quelconque sous l'action de cette rotation. Ça c'est quelque chose que j'aime bien dans cette idée des transformations orthogonales, des bases orthonormées de l'espace. Ce n'était pas directement en lien avec la diagonalisation orthogonale d'une matrice symétrique, mais c'est quand même un exemple de l'utilisation d'un changement de base par une matrice orthogonale. Dans la suite de ce chapitre, nous verrons des applications de la diagonalisation orthogonale d'une matrice symétrique.

Notes

Summary



15m 29s