



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- Notes



Définition.

- (1) Une forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^n$ est une application $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par une matrice symétrique $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ de telle sorte que $Q(u) = uAu^T$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.
- (2) Soient $x_1, \dots, x_n$ des variables. Alors l'équation $Q(x_1, \dots, x_n) = 1$ définit une conique dans $\mathbb{R}^2$ (si $n = 2$) et une quadrique dans $\mathbb{R}^3$ (si $n = 3$).

Si $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j



10.7 Formes quadratiques dans $\mathbb{R}^n$: définitions, exemples

Une forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^n$ est une application Q de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie, comme suit, par une matrice symétrique A de telle sorte que Q appliqué à un vecteur u , dans $\mathbb{R}^n$, est le vecteur u qui multiplie la matrice A qui multiplie la transposée de u , pour tout u dans $\mathbb{R}^n$. Donc, ça, c'est la définition d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Maintenant, si on prend les variables $x_1, \dots, x_n$, et puis, qu'on applique la forme quadratique à ce n -uplet de variables, alors Q de $Q(x_1, \dots, x_n) = 1$ définit une conique dans $\mathbb{R}^2$, et puis une quadrique dans $\mathbb{R}^3$. Maintenant, avant de faire des exemples, j'aimerais donner une autre façon de voir une forme quadratique. C'est une définition alternative. Donc, si je donne des coordonnées ici, si $u = (x_1, \dots, x_n)$ et A est la matrice a_{ij} symétrique, donc, a_{ij} est égal à a_{ji} pour tout i, j . Je souligne, peut-être, que cette matrice est symétrique. Alors, Q de u , par définition, c'est le vecteur u qui multiplie la matrice A , qui multiplie le vecteur u transposé.

Notes

Summary



0m 25s

Définition.

- (1) Une forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^n$ est une application $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par une matrice symétrique $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ de telle sorte que $Q(u) = uAu^T$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.
- (2) Soient $x_1, \dots, x_n$ des variables. Alors l'équation $Q(x_1, \dots, x_n) = 1$ définit une conique dans $\mathbb{R}^2$ (si $n = 2$) et une quadrique dans $\mathbb{R}^3$ (si $n = 3$).

Si $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j , alors

$$Q(u) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} x_j x_i$$

10.7 Formes quadratiques dans $\mathbb{R}^n$: définitions, exemples



Maintenant, je fais cette multiplication. Donc, j'ai le vecteur u , et puis, maintenant, je calcule les coordonnées du produit A fois ce vecteur colonne. Alors, la première coordonnée, c'est quand je prends la première ligne de A . Donc, j'aurais la somme, i égal à 1 jusqu'à n , $A_{1i}x_i$, ça, c'est la première coordonnée de ce vecteur colonne. Ensuite, pour la deuxième coordonnée, je prends la deuxième ligne de A , donc, j'ai la somme, i égal à 1 jusqu'à n , $A_{2i}x_i$, etc. Donc, la dernière coordonnée, ce serait quand je prends la $n^{\text{ème}}$ ligne de A . Donc, i égal à 1 jusqu'à n , $A_{ni}x_i$, voilà. Et puis, ensuite, je dois faire le produit de ce vecteur-là par ce vecteur-là. Ça va être une grande somme et c'est juste une valeur réelle, parce que ça, c'est une matrice $1 \times n$, $n \times n/i$, et ensuite, $n \times 1$. Donc, à la fin, j'ai une matrice 1×1 , donc un scalaire. Donc, ici, ça donnerait une double somme, j égal à 1 jusqu'à n , i égal à 1 jusqu'à n et j'ai $A_{ji}x_jx_i$. Et puis, maintenant, je réécris ça.

Notes

Summary



Définition.

- (1) Une forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^n$ est une application $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par une matrice symétrique $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ de telle sorte que $Q(u) = uAu^T$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.
- (2) Soient $x_1, \dots, x_n$ des variables. Alors l'équation $Q(x_1, \dots, x_n) = 1$ définit une conique dans $\mathbb{R}^2$ (si $n = 2$) et une quadrique dans $\mathbb{R}^3$ (si $n = 3$).

Si $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j , alors

$$Q(u) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} x_j x_i$$

$$= a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + \dots$$

un polynôme en n variables $x_1, \dots, x_n$, homogène, de degré 2 (càd chaque terme est de degré 2).

10.7 Formes quadratiques dans $\mathbb{R}^n$: définitions, exemples



Ceci est égal, en utilisant le fait que A_{ij} est égal à A_{ji} pour tout i, j , ceci est égal à $A_{11}x_1^2 + \dots + A_{nn}x_n^2$, donc, ça, ce sont tous les termes où j'ai j égal à i, ici. Et puis, après, comme A_{ji} c'est la même chose que A_{ij} , j'aurais deux fois, plus deux fois $A_{12}x_1x_2$, plus deux fois $A_{13}x_1x_3$, etc. Donc, en fait, ce qu'on a, c'est un polynôme homogène en n variables, $x_1, \dots, x_n$, de degré 2. C'est un polynôme en n variables, $x_1, \dots, x_n$, homogène, ça veut dire que tous les termes là-dedans sont de degré 2. Homogène, de degré 2. Donc, c'est-à-dire, chaque monôme, donc chaque terme, est de degré 2. Donc, en fait, il y a, dans certains livres, c'est la définition qu'on donne d'une forme quadratique, que c'est un polynôme en n variables, $x_1, \dots, x_n$, homogène de degré 2, et puis, on l'applique à un vecteur dans $\mathbb{R}^n$ et c'est ça qui donne la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Donc, ça, c'est juste une définition alternative, ce qui est intéressant à voir. Maintenant, faisons des exemples.

Notes

Summary



Exemples dans $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

(1) $A = I_2$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = I_3$

Formes quadratiques associées:

(1) $Q(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2.$

La conique associée est $x_1^2 + x_2^2 = 1$. (cercle de rayon 1, centré à (0,0))

(2) $Q(u_1, u_2) = 3u_1^2 + u_2^2.$

La conique associée est $3x_1^2 + x_2^2 = 1$ (ellipse, centrée à (0,0))

(3) $Q(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} =$

10.7 Formes quadratiques dans $\mathbb{R}^n$: définitions, exemples

Donc, ici, si je prends la matrice A égale à l'identité, 2×2 , alors je regarde la forme quadratique associée. Donc, à chaque fois, je vais faire, ici. Donc, ici, j'aurais Q appliqué à un vecteur u_1, u_2 , ça donnerait (u_1, u_2) qui multiplie la matrice identité qui multiplie u_1, u_2 . Ça, c'est (u_1, u_2) qui multiplie u_1, u_2 , et donc, c'est $u_1^2 + u_2^2$. Ensuite, la conique associée est l'équation $x_1^2 + x_2^2 = 1$, donc, c'est un cercle de rayon 1 de centre l'origine. Un cercle de rayon 1, centré à l'origine. Maintenant, deuxième exemple. Donc, ça, c'est l'exemple 1. Exemple 2. Ici, je fais $Q(u_1, u_2)$. Je fais pas tout le développement, ici, parce que vous pouvez voir ce qui va arriver. J'ai $3u_1^2 + u_2^2$. Et puis, ici, la conique associée est l'équation $3x_1^2 + x_2^2 = 1$. Et ça, c'est une ellipse, aussi centrée à l'origine. L'exemple 3. Donc, ici, on a des termes en dehors de la diagonale. Ici, $Q(u_1, u_2)$, donc, cette fois, je réécris, (u_1, u_2) fois la matrice, fois u_1, u_2 . Donc, j'ai (u_1, u_2) qui multiplie le vecteur colonne.

Notes

Summary



Exemples dans $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

(1) $A = I_2$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = I_3$

Formes quadratiques associées:

(1) $Q(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2.$

La conique associée est $x_1^2 + x_2^2 = 1$. (cercle de rayon 1, centre à (0,0))

(2) $Q(u_1, u_2) = 3u_1^2 + u_2^2.$

La conique associée est $3x_1^2 + x_2^2 = 1$ (ellipse, centre à (0,0))

(3) $Q(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 + u_2 \end{pmatrix}$

$= u_1(u_1 + u_2) + u_2(u_1 + u_2) = u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2$

La conique associée est $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1.$

$(x_1 + x_2)^2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = \pm 1.$

Deux droites.

(4)

10.7 Formes quadratiques dans $\mathbb{R}^n$: définitions, exemples



Là, j'ai $u_1 + u_2$, $u_1 + u_2$, et puis, ceci est égal à u_1 , qui multiplie $u_1 + u_2$, plus u_2 qui multiplie $u_1 + u_2$. Et donc, j'ai $u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2$. Donc, ça, c'est un bon exemple, parce que c'est ici qu'on voit la deuxième formule que j'avais développée. C'est que, ici, on a le terme u_1^2 avec ce coefficient-là, on a le terme u_2^2 avec ce coefficient-là, et on a le terme croisé u_1u_2 , et c'est deux fois ce coefficient-là, c'est la somme des deux coefficients, mais c'est deux fois ce coefficient-là, comme c'est une matrice symétrique. Ici, la conique associée est l'équation $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1$. Donc, du coup, j'ai $(x_1 + x_2)^2 = 1$. Donc, $x_1 + x_2 = \pm 1$. Donc, c'est deux droites, qu'on peut dessiner, ce sont des droites parallèles. Et, enfin, dernier exemple. C'est très similaire au premier exemple. Ici, $Q(u_1, u_2, u_3)$, c'est simplement $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ et la quadrique associée, donc, si on a l'équation, on aura $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, et c'est une sphère de rayon 1 aussi centrée à l'origine.

Notes

Summary



Exemples dans $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

(1) $A = I_2$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = I_3$

Formes quadratiques associées:

(1) $Q(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2.$

La conique associée est $x_1^2 + x_2^2 = 1$. (cercle de rayon 1, centre à (0,0))

(2) $Q(u_1, u_2) = 3u_1^2 + u_2^2.$

La conique associée est $3x_1^2 + x_2^2 = 1$ (ellipse, centre à (0,0))

(3) $Q(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 + u_2 \end{pmatrix}$

$= u_1(u_1 + u_2) + u_2(u_1 + u_2) = u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2$

La conique associée est $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1.$

$(x_1 + x_2)^2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = \pm 1.$

Deux droites.

(4) $Q(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, sphère de rayon 1 centrée à l'origine.



10.7 Formes quadratiques dans $\mathbb{R}^n$: définitions, exemples

Donc, ici, c'était un tout petit paragraphe où je donne la définition d'une forme quadratique, et après, nous allons travailler avec cela, parce que, ici, je vous ai donné des formes assez jolies où on voit géométriquement ce que ça représente, mais vous pouvez imaginer que, si la matrice est compliquée, on ne voit pas tout de suite quel est l'objet géométrique représenté par la forme quadratique, et nous allons travailler et donner un théorème qui s'appelle le théorème des axes principaux pour trouver, justement, la jolie forme de cet objet géométrique en faisant un changement d'axe.

Notes

Summary

