



10.9 Classification des formes quadratiques



Dans cette vidéo, nous allons d'abord décrire les possibilités, donner une définition qui décrit les possibilités pour les formes quadratiques, et ensuite, on va énoncer un théorème, qui suit directement de notre théorème des axes principaux, qui donne un critère pour déterminer de quelle forme est notre forme quadratique, de quel type est notre forme quadratique.

Notes

Summary



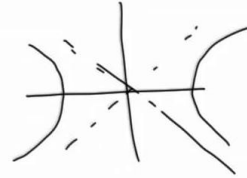
0m 04s

Exemples formes quadratiques de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On diagonalise orthogonalement la matrice $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ (symétrique) qui définit une forme quadratique Q .

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P \text{ orthogonale.}$$

Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ on a $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$ ellipse

Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$ hyperbole



10.9 Classification des formes quadratiques



Donc, d'abord, je veux commencer par considérer des exemples. Donc, je prends l'exemple des formes quadratiques de $\mathbb{R}^2$. On va ramener la matrice A qui définit Q à une forme diagonale. La matrice A , une matrice symétrique, qui définit une forme quadratique Q . Donc, après, on aura cette forme diagonale, donc, on aura $P^T A P$, est une matrice diagonale. $\lambda_1, \lambda_2, 0, 0$, où P , ici, est une matrice orthogonale, et puis λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres. Puis, ici, on voit que si λ_1 est strictement positif et λ_2 aussi, on a l'équation $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$, ça, ce sont les nouvelles variables, et ça, c'est une ellipse. Si λ_1 est positif et λ_2 est négatif, on a l'équation $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$. Donc, maintenant, ça, c'est une valeur négative et ça, c'est une hyperbole. Je vous rappelle ce qu'est une hyperbole. On a deux droites, comme ça, et puis, on a un truc comme ceci, par exemple. Si $\lambda_1 = 0$, ça, c'est une possibilité, et λ_2 est positif, ou le contraire, on aura $\lambda_2 y_2^2 = 1$, donc, on a $y_2^2 = 1/\lambda_2$, donc, on a $y_2 = \pm 1/\sqrt{\lambda_2}$, et ça, c'est deux droites.

Notes

Summary



Exemples formes quadratiques de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On diagonalise orthogonalement la matrice $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ (symétrique) qui définit une forme quadratique Q .

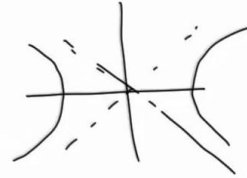
$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P \text{ orthogonale.}$$

Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ on a $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$ ellipse

Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$ hyperbole

Si $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ $\lambda_2 y_2^2 = 1$
 $y_2^2 = \frac{1}{\lambda_2}$
 $y_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ deux droites

$\begin{cases} \text{Si } \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 < 0 & \lambda_2 y_2^2 = 1 \text{ impossible} \\ \text{Si } \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 0 & 0 = 1 \text{ impossible} \end{cases}$



10.9 Classification des formes quadratiques



Puis, enfin, bon, je peux faire l'autre version de ça aussi. Si, enfin, l'un est zéro, et l'autre est négatif, alors, on aura $\lambda_2 y_2^2 = 1$, et ça, c'est impossible, puisqu'ici, on a une valeur négative égale à 1, l'équation représente l'ensemble vide. Et, enfin, bon, j'avais dit enfin avant, mais il y a la possibilité que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$. À ce moment-là, l'équation devient $0 = 1$, qui est aussi impossible. Donc, j'aurais pu mettre ces deux-là ensemble. Maintenant, de ça, on va tirer une définition.

Notes

Summary



Définition. Soit $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique. On dit que

- (1) Q est définie positive si $Q(u) > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$.
- (2) Q est définie négative si $Q(u) < 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$.
- (3) Q est non définie si Q prend des valeurs positives et négatives.
- (4) Q est positive si $Q(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.
- (5) Q est négative si $Q(u) \leq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

Exemples (1) $Q(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2$ est définie positive si $a_i > 0$.



10.9 Classification des formes quadratiques

Dans le cas général, si on a une forme quadratique, on dit que Q est définie positive, je vais souligner. Définie positive si pour chaque vecteur u , Q prend une valeur strictement positive. Bon, pour chaque vecteur u non nul, c'est clair que $Q(0)=0$, mais pour chaque vecteur non nul, Q prend une valeur positive. On dit que Q est définie négative si pour chaque vecteur u non nul, Q prend une valeur négative. On dit que Q est non définie si Q prend des valeurs positives et négatives. On dit que Q est positive, seulement, si Q prend des valeurs non négatives, et, négative, si Q prend des valeurs non positives. Donc, l'exemple. Si je prends $Q(x_1, x_2, x_3)$, dans $\mathbb{R}^3$ égale à $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2$, ça serait définie positive si tous les a_i sont strictement plus grands que 0, parce que là, on n'aura jamais une valeur négative, ici, et on n'aura jamais 0 non plus si on substitue un vecteur non nul. Ça serait définie négative si tous les a_i sont plus petits que 0, par le même raisonnement.

Notes

Summary



3m 18s

Théorème. (Formes quadratiques et valeurs propres)

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique associée.

- (1) Q est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
- (2) Q est définie négative si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives.
- (3) Q est non définie si A admet à la fois des valeurs propres positives et négatives.

**10.9 Classification des formes quadratiques**

Ça serait non définie s'il y en a un qui est positif et un autre qui est négatif, parce qu'on pourrait faire un mélange après, on substitue 0 pour celui qui est positif, et après, non 0 pour celui qui est négatif et on aura une valeur négative, et on fait le contraire, et on aura une valeur positive. Donc, voilà. Ça, c'est un exemple. Exemple 2. Si on fait $Q(x_1, x_2)$, donc, ici, dans $\mathbb{R}^2$, est égal à x_1^2 , ça, ça prend une valeur positive, mais éventuellement 0. Donc, ça, c'est positif, car $Q(x_1, x_2)$ est toujours positive, disons, non négative, mais $Q(0, 1) = 0$. Donc, on trouve 0 parfois, donc, ce n'est pas définie positive, mais c'est positive. Donc, voilà deux exemples. Maintenant, on a un théorème qui nous dit comment déterminer si une forme est définie positive, définie négative, non définie. Et c'est le théorème suivant. Alors, je me donne une matrice symétrique et la forme quadratique associée. Alors, cette forme est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Notes

Summary



4m 52s

Théorème. (Formes quadratiques et valeurs propres)

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique associée.

- (1) Q est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
- (2) Q est définie négative si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives.
- (3) Q est non définie si A admet à la fois des valeurs propres positives et négatives.

Preuve On diagonalise A orthogonalement, c'éd $P^T A P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

10.9 Classification des formes quadratiques

Q est définie négative si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives, et Q est non définie si A admet à la fois des valeurs propres positives et négatives. Et puis, on pourrait rajouter des critères ici pour dire ce que c'est, positif ou bien négatif. Pour la forme positive, ce serait que toutes les valeurs propres sont plus grandes ou égales à 0. Négative, si toutes les valeurs propres sont plus petites ou égales à 0. Donc, on admet la possibilité d'avoir la valeur propre 0. Et puis, la preuve de ce théorème, ce n'est pas du tout difficile, c'est exactement une utilisation de la diagonalisation orthogonales. De nouveau, on diagonalise A orthogonalement, c'est-à-dire, on aura $P^T A P = D$, une matrice diagonale, et le long de la diagonale, ici, on sait que ça serait les valeurs propres de A . Donc, la matrice diagonale qu'on obtient aura exactement les mêmes valeurs propres que la matrice A , où, ici, P est orthogonale, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de D et donc de A .

Notes

Summary



Théorème. (Formes quadratiques et valeurs propres)

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique associée.

- (1) Q est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
- (2) Q est définie négative si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives.
- (3) Q est non définie si A admet à la fois des valeurs propres positives et négatives.

Preuve On diagonalise A orthogonalement, c'éd $P^T A P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

où P est orthogonale et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A .

La forme quadratique associée à D est définie positive $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$.

Comme la forme quadratique associée à D est obtenue de la forme définie par A par un changement de variables, Q est définie positive $\Leftrightarrow$ la forme associée à D est définie positive.

**10.9 Classification des formes quadratiques**

Et après, on sait que la forme quadratique associée à D est définie positive, par exemple, je vais juste faire le premier cas, est définie positive si et seulement si tous les λ_i sont strictement positifs, mais comme la forme quadratique définie par D est simplement la même que la forme quadratique définie par A avec un changement de variable, on a aussi que A est définie positive si et seulement si tous les λ_i sont positifs.

J'écris une phrase ici, donc : Comme la forme quadratique associée à D est obtenue de la forme associée à A , ou définie par A , obtenue de cette forme-là par un changement de variable, la forme originale Q est définie positive si et seulement si la forme associée à D est définie positive. Et ainsi de suite; on peut montrer le 2 et 3 de la même façon. Donc, on diagonalise, on regarde cette matrice-là. Pour celle-là, par les exemples qu'on a vus avant, on comprend quand c'est définie positive, ou négative, ou non définie. Ce sont vraiment les signes des valeurs propres. Ce sont les mêmes valeurs propres que la matrice A , et comme tout cela ne se fait que par un changement de variable, alors on peut dire la même chose pour la matrice A .

Notes

Summary

