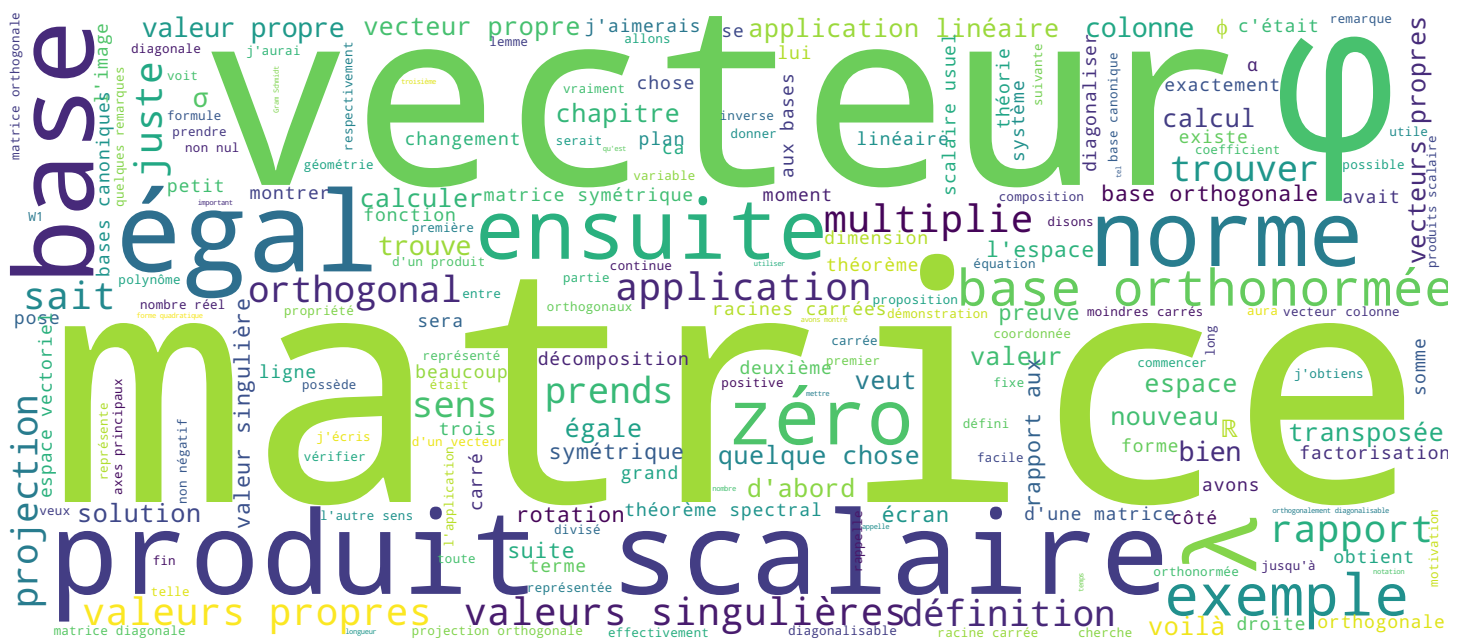


Chapitre 10 : Matrices orthogonales, matrices symétriques

10.10 Valeurs singulières

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman





10.10 Valeurs singulières

Dans les derniers paragraphes de ce chapitre et du cours, nous allons voir ce qui s'appelle les valeurs singulières d'une matrice ou d'une application et la décomposition en valeurs singulières d'une matrice. Ça prendra du temps pour développer la théorie; c'est de nouveau une application du théorème spectral. Mais d'abord, je vais commencer par vous dire le but de l'histoire, mais ça prendra un peu de temps avant qu'on arrive à cette décomposition en valeurs singulières. C'est quelque chose qui est très utile dans beaucoup d'applications de l'algèbre linéaire par exemple, le traitement de l'image et d'autres domaines. Donc c'est quelque chose de très important et je trouve ça aussi très joli et très intéressant.

Notes

Summary



0m 03s

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On peut des fois diagonaliser A , i.e. il existe $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible t.q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Très utile : On a $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale.

On peut même quand la diagonalisation n'est pas possible, e.g. si A n'est pas carrée, trouver Q et P inversibles t.q. $A = QDP$ où D est diagonale.



10.10 Valeurs singulières

Donc la motivation est la suivante; on l'a déjà étudié dans le chapitre 8, c'est le fait que des fois, on peut diagonaliser une matrice. Donc on se donne une matrice $n \times n$ et puis des fois, il existe une matrice inversible telle que cette matrice, qui peut être diagonalisée par un changement de base. Et puis nous avons vu dans le dernier paragraphe du chapitre 8, une application à la génétique où on a diagonalisé une matrice qui nous a permis de suivre l'évolution d'une population. Parce que c'est par exemple beaucoup plus facile de calculer une très haute puissance de A en utilisant cette équation-là, la forme de la matrice diagonale. Et puis évidemment, si la matrice n'est pas carrée, on ne pourra pas faire ça, et en plus, on a vu des matrices qui ne sont pas diagonalisables. Maintenant on a vu beaucoup de matrices qui sont diagonalisables car elles sont symétriques, mais dans le chapitre 8, on a bien vu qu'il y avait des matrices qui n'étaient pas diagonalisables. Mais ce qu'on va voir dans ce chapitre, à la fin, c'est qu'on peut quand même faire quelque chose de similaire même quand on ne peut pas diagonaliser la matrice.

Notes

Summary



0m 47s

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On peut des fois diagonaliser A , i.e. il existe $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible t.q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Très utile : On a $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale.

On peut même quand la diagonalisation n'est pas possible, e.g. si A n'est pas carrée, trouver Q et P inversibles t.q. $A = QDP$ où D est diagonale.



10.10 Valeurs singulières

Donc on peut commencer avec une matrice quelconque qui n'est même pas carrée et on peut trouver les matrices Q et P qui sont les deux inversibles et une matrice diagonale D telle que $A = QDP$. Donc le Q ne sera pas P inverse et le P ne sera pas Q inverse, mais on peut quand même trouver une factorisation comme ça et c'est ça le but de ce dernier paragraphe, c'est de trouver cette factorisation qui s'applique dans beaucoup de domaines. Donc voilà, ça c'est la motivation, mais on n'y arrive pas tout de suite. Donc je commence d'abord par montrer un premier lemme dans lequel on va voir ce qu'est une valeur singulière d'une matrice.

Notes

Summary



1m 48s

Premier lemme. Soient $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, munis chacun du produit scalaire usuel, avec bases canoniques $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ respectivement. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire t.q. $[\phi]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} = A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Soit $\phi^T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire t.q. $[\phi^T]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} = A^T$. Alors $\phi^T \circ \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$ possède une base de vecteurs propres pour $\phi^T \circ \phi$ et toutes les valeurs propres (réelles) sont positives ou nulles.

10.10 Valeurs singulières

Le premier lemme est un peu long à énoncer, et après je vais démontrer. Je me donne les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ munis de leurs produits scalaires usuels et je fixe les bases canoniques $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ qui sont des bases orthonormées. Ensuite, je me donne une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et je peux la représenter par rapport à ces deux bases cela me donnera une matrice $m \times n$ à coefficients réels. Ensuite, je définis une application dans l'autre sens, i.e. de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que si j'écris la matrice de cette application par rapport aux deux bases, mais dans l'autre sens, ça donne la matrice transposée de A . Je l'appelle l'application transposée. On sait qu'à chaque matrice, il y a une unique application linéaire qui lui est associée dès le moment où on a fixé deux bases. Maintenant, je fais la composition de ces deux applications. J'ai ϕ qui va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et ϕ^T qui va de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ et quand je fais la composition, je vais de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Notes

Summary



2m 26s

Premier lemme. Soient $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, munis chacun du produit scalaire usuel, avec bases canoniques $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ respectivement. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire t.q. $[\phi]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} = A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Soit $\phi^T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire t.q. $[\phi^T]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} = A^T$. Alors $\phi^T \circ \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$ possède une base de vecteurs propres pour $\phi^T \circ \phi$ et toutes les valeurs propres (réelles) sont positives ou nulles.

Preuve $[\phi^T \circ \phi]_{\mathcal{B}_1} = [\phi^T]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} \cdot [\phi]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} = A^T A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, une matrice symétrique!

Par le théorème spectral, $\phi^T \circ \phi$ peut être diagonalisé orthogonalement, $\mathbb{R}^n$ possède une base orthonormée de vecteurs propres de $\phi^T \circ \phi$.

10.10 Valeurs singulières



Et puis l'énoncé, c'est que ce $\mathbb{R}^n$, à ce moment-là, possède une base de vecteurs propres pour cette application $\phi^T \circ \phi$. Et, ce qui est le plus étonnant, c'est que toutes les valeurs propres sont positives ou bien nulles. Donc, je fais la preuve. C'est vraiment qu'une application de notre théorème spectral. Donc je regarde l'application que je vais étudier : $\phi^T \circ \phi$ représentée par rapport à la base $\mathcal{B}_1$. Et puis ça, c'est juste l'application ϕ^T représentée par rapport aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ dans ce sens fois ϕ par rapport aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$ dans ce sens, donc ça, c'est $A^T A$, qui est une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels et qui est symétrique. Donc si on fait la transposée de cette matrice-là, on obtient $A^T A$, donc c'est une matrice symétrique. Donc, par le théorème spectral, cette application $\phi^T \circ \phi$ peut être diagonalisée orthogonalement. Pour une application linéaire, ça veut dire que $\mathbb{R}^n$ possède une base orthonormée de vecteurs propres de $\phi^T \circ \phi$. Donc ça, c'est juste une application directe du théorème spectral. Maintenant, je continue avec la démonstration.

Notes

Summary



Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $\phi^T \circ \phi$ avec vecteur propre $v \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$.

$$\left((\phi^T \circ \phi)(v) \right) \cdot v = \left(A^T A [v]_{\mathcal{B}_1} \right) \cdot [v]_{\mathcal{B}_1},$$

$\uparrow$
 produit scalaire usuel
 dans $\mathbb{R}^n$



10.10 Valeurs singulières



Notes

Je prends une valeur propre de $\phi^T \circ \phi$ donc une valeur propre réelle, d'ailleurs toutes les valeurs propres sont réelles je prends une valeur propre de $\phi^T \circ \phi$ et un vecteur propre non nul, bon ça c'est la définition d'un vecteur propre, donc, un vecteur propre et puis deux normes. Maintenant, je vais faire un calcul. Je fais $\phi^T \circ \phi$ que j'applique à v , donc ça me donne un vecteur ensuite, je fais le produit scalaire de ça avec le vecteur v . Donc ça, c'est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. Donc maintenant, ceci est égal à $A^T A$ qui multiplie le vecteur v représenté par rapport à la base B_1 , produit scalaire avec le vecteur v . Et comme on sait que quand on a un vecteur colonne et qu'on veut faire le produit scalaire, ça revient à faire la transposée et multiplier et ça, c'est un produit matriciel, donc ici, j'ai $(v)_{B_1}^T A^T A (v)_{B_1}$. Maintenant, je regarde ces deux-là ensemble, donc ça c'est $(A(v)_{B_1})^T$ qui multiplie $A(v)_{B_1}$.

Summary



5m 16s

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $\phi^T \circ \phi$ avec vecteur propre $v \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$.

$$\begin{aligned}
 (\phi^T \circ \phi)(v) \cdot v &= (A^T A [v]_{\mathcal{B}_1}) \cdot [v]_{\mathcal{B}_1} \quad \leftarrow \text{produit scalaire} \\
 &= (A^T A [v]_{\mathcal{B}_1})^T [v]_{\mathcal{B}_1} \\
 &= [v]_{\mathcal{B}_1}^T A^T A [v]_{\mathcal{B}_1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{multiplication matricielle} \\ \text{produit scalaire} \end{array} \right. \\
 &= (A[v]_{\mathcal{B}_1})^T A[v]_{\mathcal{B}_1} \\
 &= (\phi(v)) \cdot (\phi(v)) \\
 &= \|\phi(v)\|^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 produit scalaire usuel
 dans $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 (\lambda v) \cdot v \\
 \lambda (v \cdot v) \\
 \lambda \|v\|^2 \\
 \lambda
 \end{aligned}$$

10.10 Valeurs singulières



Et ça c'est exactement le produit scalaire entre $\phi(v)$ et $\phi(v)$ Donc ça c'est de nouveau le produit scalaire. Je vais peut-être souligner ici. Ici, c'est le produit scalaire. Ici, ces trois-là, ce sont les multiplications matricielles. Et ici, c'est le nouveau produit scalaire. Donc ceci est égal à $\|\phi(v)\|^2$. Donc c'est plus grand ou égal à zéro. Ça peut être zéro parce qu'on ne sait pas si l'application ϕ envoie le vecteur v à zéro, c'est possible car il est possible que v soit dans le noyau de ϕ . Mais en tout cas, c'est plus grand ou égal à zéro. Et ici, de ce côté je développe de ce côté, maintenant. j'avais choisi v d'être un vecteur propre pour la valeur propre λ pour cette application-là, donc là j'ai λv produit scalaire avec le vecteur v et comme le produit scalaire est bilinéaire, on trouve $\lambda \langle v, v \rangle$. Bon, ça c'est λ de la norme au carré de v , mais on a choisi v de norme 1, donc ceci est égal à λ . Donc ça est égal à ça, égal à ça, égal à ça. On a donc que λ égal à ça et effectivement, c'est une valeur non négative.

Notes

Summary



Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $\phi^T \circ \phi$ avec vecteur propre $v \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$.

$$\begin{aligned}
 (\phi^T \circ \phi)(v) \cdot v &= (A^T A [v]_{\mathcal{B}}) \cdot [v]_{\mathcal{B}} \quad \leftarrow \text{produit scalaire} \\
 &= (A^T A [v]_{\mathcal{B}})^T [v]_{\mathcal{B}} \\
 &= [v]_{\mathcal{B}}^T A^T A [v]_{\mathcal{B}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{multiplication matricielle} \\
 &= (A[v]_{\mathcal{B}})^T A[v]_{\mathcal{B}} \\
 &= (\phi(v)) \cdot (\phi(v)) \quad \text{produit scalaire} \\
 &= \|\phi(v)\|^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 produit scalaire usuel
 dans $\mathbb{R}^n$

$\downarrow$

$$\begin{aligned}
 (\lambda v) \cdot v &= \lambda (v \cdot v) \\
 &= \lambda \|v\|^2 \\
 &= \lambda
 \end{aligned}$$

Donc $\lambda \geq 0$ $\square$

10.10 Valeurs singulières



Donc $\lambda \geq 0$ Donc je le redis : là j'ai commencé avec une application linéaire et puis je prends l'application transposée et ensuite je fais la composition des deux. Et ce qu'on a montré, c'est représenté par une matrice symétrique, donc c'est orthogonalement diagonalisable. Mais ce qui est nouveau dans ce lemme, c'est que si j'ai une valeur propre de ça, c'est un nombre réel non négatif. Donc ça, c'est ce qui est nouveau et ça nous permet de définir les valeurs singulières.

Notes

Summary



Définition. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ou $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($[\phi] = A$). On appelle **valeurs singulières** de A ou ϕ les racines carrées des valeurs propres de $A^T A$. On les note en général $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de telle sorte que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

$[\phi]_{B_2 B_1} = A$ B_1, B_2 bases canoniques de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$.



10.10 Valeurs singulières



Donc voilà la définition. Je me donne une matrice $m \times n$ et une application linéaire qui est représentée par cette matrice par rapport aux bases usuelles de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. On appelle valeur singulière de A ou ϕ les racines carrées des valeurs propres de la matrice $A^T A$. Je vais peut-être rajouter un point là car c'est le produit de deux matrices. Et ici je vais rajouter quelque chose. Donc ça, c'est qu'on choisit que $(\phi)_{B_1 B_2} = A$, où B_1 et B_2 sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, respectivement. Donc on trouve les valeurs propres de cette matrice-là, on sait que ce sont des nombres réels non négatifs donc on peut prendre les racines carrées de ces valeurs. On obtient des valeurs réelles, donc on obtient une suite comme ça : $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. D'habitude, on les ordonne du plus grand au plus petit. Il peut y avoir des valeurs égales. Il peut y avoir la valeur zéro aussi. Donc c'est cette suite-là qu'on appelle les valeurs singulières de la matrice A .

Notes

Summary



9m 10s

Définition. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ou $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($[\phi] = A$). On appelle **valeurs singulières** de A ou ϕ les racines carrées des valeurs propres de $A^T A$. On les note en général $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de telle sorte que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

$\{\varphi\}_{k \in \mathbb{B}_1} = A$ $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ bases canoniques de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$.

Remarques: Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $A^T A$.

Valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Soit v_i un vecteur propre de valeur propre λ_i , $\|v_i\| = 1$.

Par définition, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

De plus, nous avons montré que $\|\varphi(v_i)\|$

10.10 Valeurs singulières



Ce sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice $A^T A$. Maintenant, je veux juste faire quelques remarques sur cette définition avant de terminer par un exemple. Donc quelques remarques... Par la théorie qu'on a vue, on sait qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour la matrice $A^T A$ et les valeurs propres, que nous allons ordonner aussi : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Donc il peut y avoir des répétitions. Et puis les σ_i par définition : σ_i c'est la racine carrée de λ_i . Maintenant, je voudrais vous montrer quelque chose. Dans le développement que nous avons vu plus haut... - il faut retourner un peu en arrière - De plus, nous avons montré que $\|\varphi(v_i)\|$... Je vais fixer une notation, soit v_i un vecteur propre de valeur propre λ_i et de norme 1. C'est la situation qu'on avait prise dans la démonstration du lemme. De plus, nous avons montré dans la preuve du lemme que si on applique φ à v_i et qu'on prend la norme, on trouve que $\|\varphi(v_i)\|^2 = \lambda_i \geq 0$.

Notes

Summary



10m 28s

Définition. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ou $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($[\phi] = A$). On appelle **valeurs singulières** de A ou ϕ les racines carrées des valeurs propres de $A^T A$. On les note en général $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de telle sorte que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

$[\phi]_{B_2 B_1} = A$ B_1, B_2 bases canoniques de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$.

Remarques: Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $A^T A$.

Valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Soit v_i un vecteur propre de valeur propre λ_i , $\|v_i\| = 1$.

Par définition, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

De plus, nous avons montré que dans la preuve du lemme

$$\|\phi(v_i)\|^2 = \lambda_i \geq 0$$

$$\|\phi(v_i)\| = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i.$$

$$\|A[v_i]_{B_1}\| = \sigma_i.$$

10.10 Valeurs singulières



Ainsi on trouve que $\|\phi(v_i)\| = \sqrt{\lambda_i}$ Et donc ça, c'est σ_i . Et c'est la même chose que si on faisait $\|A[v_i]_{B_1}\| = \sigma_i$. Donc ça, on va réutiliser. Donc en plus de ce qu'on a ici, la définition, c'est qu'on a cette égalité-là qui va être utile. C'est que ϕ appliquée à un de ces vecteurs propres est de norme la valeur singulière ou bien la matrice multipliée par le vecteur colonne qui représente le vecteur propre, c'est la valeur singulière correspondante. Donc ça, on va réutiliser. Et maintenant, j'aimerais faire un exemple pour un calcul de valeur singulière et après, dans la prochaine vidéo, on continuera avec la théorie toujours dans le but de faire cette décomposition.

Notes

Summary



Exemple. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec matrice $A = [\phi]_{B_2 B_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs singulières de A .

On considère la matrice symétrique $A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

On vérifie que $\chi_{A^T A}(t) = (25 - t)(t - 9)$.

Valeurs propres sont $\lambda_1 = 25, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0$
 $25 \geq 9 \geq 0$

valeurs singulières $5 \geq 3 \geq 0$.



10.10 Valeurs singulières

Donc voilà l'exemple : je me donne l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui a ça comme matrice. De plus B_1 et B_2 sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, respectivement et je veux trouver les valeurs singulières. Donc c'est un simple calcul, je vais juste faire ça une fois comme ça vous voyez l'exemple. Donc on considère la matrice symétrique $A^T A$. Donc on doit faire le calcul de [voir écran]. Et cette multiplication donne la matrice [voir écran] Et puis vous vérifiez que le polynôme caractéristique de cette matrice-là est le polynôme $(25 - t)t(t - 9)$. Donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 25, \lambda_2 = 9$, je vais les mettre dans ce sens-là, et $\lambda_3 = 0$, donc je les ordonne comme ça et les valeurs singulières sont les racines carrées : $5 \geq 3 \geq 0$. Donc voilà, ça c'est un exemple de calcul de valeurs singulières ça va revenir dans notre décomposition en valeurs singulières après.

Notes

Summary



13m 26s