



10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental



Nous sommes toujours dans la recherche de cette décomposition de matrices en un produit d'une matrice inversible fois une matrice diagonale fois une matrice inversible. On ne peut pas diagonaliser mais on peut trouver quand même cette décomposition-là. Nous avons établi jusque-là la notion de valeur singulière d'une matrice. Je vais montrer un théorème : l'existence de bases compatibles quand on fixe une application linéaire. C'est un théorème très joli et surprenant, et qui découle aussi du théorème spectral.

Notes

Summary



0m 04s

Théorème. (Existence de bases compatibles). Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ (munis chacun du produit scalaire usuel et avec bases canoniques $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ respectivement). Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour $\phi^T \circ \phi$. On suppose que ϕ admette r valeurs singulières non nulles. Alors $(\phi(v_1), \dots, \phi(v_r))$ est une base orthogonale de $\text{im}(\phi)$ et donc $\text{rang}(\phi) = r$.

10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental



Voilà le théorème. Je me donne une application linéaire des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ munis chacun du produit scalaire usuel et des bases canoniques orthonormées $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et puis ensuite je fixe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ une nouvelle base, formée de vecteurs propres pour $\phi^T \circ \phi$ comme décrit dans la vidéo précédente. On suppose que ϕ admet r valeurs singulières non nulles parce qu'on sait que quand on prend les valeurs propres de cette matrice-là on aura une suite de nombres réels, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec des égalités possibles. Ce sera des nombres réels non-négatifs éventuellement zéro, on prend les racines carrées, ça donne les valeurs singulières, et puis de ces n valeurs singulières je veux regarder les r qui sont non-nuls. Si je prends l'image de ces vecteurs-là par l'application ϕ , ça serait une base orthogonale de l'image de ϕ , en particulier le rang de ϕ est égal à r . Je ferai un dessin après, c'est un théorème très surprenant vous verrez quand je ferai le dessin.

Notes

Summary



0m 41s

Théorème. (Existence de bases compatibles). Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ (munis chacun du produit scalaire usuel et avec bases canoniques $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ respectivement). Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour $\phi^T \circ \phi$. On suppose que ϕ admette r valeurs singulières non nulles. Alors $(\phi(v_1), \dots, \phi(v_r))$ est une base orthogonale de $\text{im}(\phi)$ et donc $\text{rang}(\phi) = r$.

Comme $\|\phi(v_i)\|^2 = \lambda_i = \sigma_i^2$, $\frac{\phi(v_i)}{\sigma_i}$ est un vecteur de norme 1. Dmc
 $(\frac{\phi(v_1)}{\sigma_1}, \dots, \frac{\phi(v_r)}{\sigma_r})$ est une base orthonormée de $\text{im}(\phi)$.

Exemple $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$
il existe une base orthonormée v_1, v_2, v_3, v_4 de $\mathbb{R}^4$

10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental



Mais avant je vais juste rajouter une phrase ici : comme on a déjà vu que la norme de $\phi(v_i)$ au carré est égale à λ_i , qui est égal au carré de σ_i , si je prends $\phi(v_i)$ et je divise par σ_i . J'ai normalisé, c'est un vecteur de norme 1. Si on voulait aller jusqu'à une base orthonormée de l'image, on ferait ça: $(\phi(v_1)/\sigma_1, \dots, \phi(v_r)/\sigma_r)$ est une base orthonormée de l'image. Maintenant, regardons ce que ça veut dire dans un exemple. Exemple: imaginez qu'on a ϕ qui va de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$, ça veut dire que ϕ n'est pas injective, car la dimension ici est trop grande. Il existe une base orthonormée v_1, v_2, v_3, v_4 de $\mathbb{R}^4$ telle que certaines images forment une base orthogonale de l'image de ϕ . Maintenant, comme j'ai dit que ça ne peut pas être injectif, je vais supposer que l'on connaît des valeurs singulières, qu'il existe une base orthonormée $\mathbb{R}^4$ correspondant aux valeurs singulières, c'est un exemple.

Notes

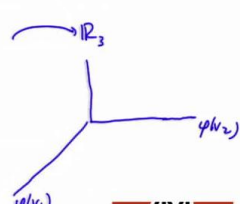
Summary



Théorème. (Existence de bases compatibles). Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ (munis chacun du produit scalaire usuel et avec bases canoniques $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ respectivement). Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour $\phi^T \circ \phi$. On suppose que ϕ admette r valeurs singulières non nulles. Alors $(\phi(v_1), \dots, \phi(v_r))$ est une base orthogonale de $\text{im}(\phi)$ et donc $\text{rang}(\phi) = r$.

Comme $\|\phi(v_i)\|^2 = \lambda_i = \sigma_i^2$, $\frac{\phi(v_i)}{\sigma_i}$ est un vecteur de norme 1. Donc $(\frac{\phi(v_1)}{\sigma_1}, \dots, \frac{\phi(v_r)}{\sigma_r})$ est une base orthonormée de $\text{im} \phi$.

Exemple $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$
il existe une base orthonormée v_1, v_2, v_3, v_4 de $\mathbb{R}^4$ correspondant aux valeurs singulières $5 \geq 3 \geq 2 \geq 0$ (par exemple).
Par le théorème, $(\phi(v_1), \phi(v_2), \phi(v_3))$ une orthogonale de $\text{im} \phi$.
 $\|\phi(v_1)\| = 5$
 $\|\phi(v_2)\| = 3$



10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental

Disons 5, 3, 2, 0 quatre valeurs singulières distinctes les trois premières sont non-nulles. Donc, par le théorème, $\phi(v_1), \phi(v_2), \phi(v_3)$, ça c'est une base orthogonale de l'image de ϕ . Donc en fait, ce que l'on a trouvé c'est une base de $\mathbb{R}^4$ où le quatrième vecteur est tué par l'application, c'est dans le noyau, c'est envoyé à zéro, et les autres vecteurs sont presque envoyés de façon isométrique à l'intérieur de $\mathbb{R}^3$, sur $\mathbb{R}^3$. Donc on a ϕ qui va envoyer $\mathbb{R}^4$ qu'on ne peut pas dessiner, sur $\mathbb{R}^3$ de façon presque isométrique, donc on va avoir les axes qui forment un système orthogonal, seulement les longueurs ne sont pas justes, donc on aura $\phi(v_1)$ ici qui est long parce que la norme de $\phi(v_1)$ est égale à σ_1 , donc c'est égal à 5. Et puis on aura $\phi(v_2)$, la norme est égale à 3, je le rallonge un petit peu. La norme de $\phi(v_2)$ est égale à 3. et la norme de $\phi(v_3)$ est égale à 2.

Notes

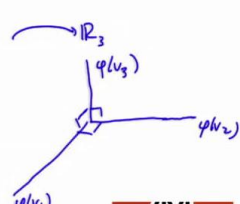
Summary



Théorème. (Existence de bases compatibles). Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ (munis chacun du produit scalaire usuel et avec bases canoniques $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ respectivement). Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour $\phi^T \circ \phi$. On suppose que ϕ admette r valeurs singulières non nulles. Alors $(\phi(v_1), \dots, \phi(v_r))$ est une base orthogonale de $\text{im}(\phi)$ et donc $\text{rang}(\phi) = r$.

Comme $\|\phi(v_i)\|^2 = \lambda_i = \sigma_i^2$, $\frac{\phi(v_i)}{\sigma_i}$ est un vecteur de norme 1. Dm
 $(\frac{\phi(v_1)}{\sigma_1}, \dots, \frac{\phi(v_r)}{\sigma_r})$ est une base orthonormée de $\text{im} \phi$.

Exemple
 $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 il existe une base orthonormée v_1, v_2, v_3, v_4 de $\mathbb{R}^4$ correspondant aux valeurs
 singulières $5 \geq 3 \geq 2 \geq 0$ (par exemple).
 Par le théorème, $(\phi(v_1), \phi(v_2), \phi(v_3))$ une orthogonale de $\text{im} \phi$.
 $\|\phi(v_1)\| = 5$
 $\|\phi(v_2)\| = 3$
 $\|\phi(v_3)\| = 2$



10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental



Ce qui est intéressant c'est que on a tous les angles rectangles que l'on voulait On a envoyé $\mathbb{R}^4$ aussi bien que possible à l'intérieur ou sur $\mathbb{R}^3$. Des fois il y a plus de valeurs singulières nulles mais là, on a envoyé une partie de cet espace presque isométriquement sur une partie de l'espace à droite. C'est vraiment étonnant on se donne une application linéaire il existe une base pour l'espace de départ telle que ϕ préserve presque la géométrie de cette partie de l'espace, en envoyant à droite Je voudrais le montrer la démonstration n'est pas difficile.

Notes

Summary



Preuve Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour $\phi^T \circ \phi$, de valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$.

$A = (\phi)_{B_2 B_1}$. Supposons que $\lambda_r > 0$ et $\lambda_j = 0$ pour $j \geq r+1$.

Comme $\|\phi(v_j)\|^2 = \lambda_j$, $\phi(v_j) = 0$ pour $j \geq r+1$.

Ainsi $\text{Im}(\phi) = \text{Vect}(\phi(v_1), \dots, \phi(v_r)) = \text{Vect}(\phi(v_1), \dots, \phi(v_r))$.

10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental



Je prends une base orthonormée de vecteurs propres pour $\phi^T \phi$ et les valeurs propres disons sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, je les ordonne comme ça. Et puis j'ai la matrice A qui représente ϕ par rapport aux bases B_1, B_2 . Je suppose que λ_r est strictement plus grand que 0 et que $\lambda_j = 0$ pour tous les suivants $j \geq r + 1$, donc les derniers sont éventuellement zéro. On sait que la norme de $\phi(v_j)$ au carré c'est λ_j . On sait que $\phi(v_j) = 0$ pour tous les $j \geq r + 1$. On sait aussi que l'image de ϕ est engendrée par les images d'une base, donc $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ et comme les derniers sont éventuellement nuls c'est le même espace que $\text{Vect}(\phi(v_1), \dots, \phi(v_r))$. Maintenant que disait le théorème? Que $\phi(v_1), \dots, \phi(v_r)$ forme une base orthogonale de l'image. Pour le moment je vois que ces vecteurs sont générateurs. Donc, l'ensemble de vecteurs $\{\phi(v_1), \dots, \phi(v_r)\}$, est une famille génératrice de l'image.

Notes

Summary



Preuve Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour $\varphi^T \circ \varphi$, de valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$.

$A = [\varphi]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$. Supposons que $\lambda_r > 0$ et $\lambda_j = 0$ pour $j \geq r+1$.

Comme $\|\varphi(v_i)\|^2 = \lambda_i$, $\varphi(v_j) = 0$ pour $j \geq r+1$.

Ainsi $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r)) = \text{Vect}(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r))$.

Donc $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r)\}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(\varphi)$.

On montre que c'est une famille orthogonale (de vecteurs non nuls) et par conséquent linéairement indépendante.



10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental

Ce que dois maintenant montrer c'est que c'est une famille orthogonale de vecteurs non-nuls et à ce moment-là je saurai qu'ils sont aussi linéairement indépendants. On montre que c'est une famille orthogonale, de vecteurs orthogonaux deux à deux. Comme on sait que la norme de $\varphi(v_i)$ est égale à λ_i et on a écarté tout ceux avec une norme égale à 0, c'est une famille orthogonale de vecteurs non-nuls et donc par un résultat du chapitre neuf et par conséquent linéairement indépendants. Alors on aura tout en même temps: que c'est une famille orthogonale et que c'est une base. Pour montrer que c'est une famille orthogonale je fais $\varphi(v_i)$ produit scalaire avec $\varphi(v_j)$, et je vais tourner ça en équation de matrices.

Notes

Summary



Preuve Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour $\varphi^T \circ \varphi$, de valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$.

$A = [\varphi]_{B_1 B_1}$. Supposons que $\lambda_r > 0$ et $\lambda_j = 0$ pour $j \geq r+1$.

Comme $\|\varphi(v_i)\|^2 = \lambda_i$, $\varphi(v_j) = 0$ pour $j \geq r+1$.

Ainsi $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r)) = \text{Vect}(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r))$.

Donc $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r)\}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(\varphi)$.

On montre que c'est une famille orthogonale (de vecteurs non nuls) et par conséquent linéairement indépendante. $i \neq j$ $\varphi(v_i) \cdot \varphi(v_j) = (A[v_i]_{B_1})^T A[v_j]_{B_1}$

$$= [v_i]_{B_1}^T A^T A[v_j]_{B_1}$$

$$= [v_i]_{B_1}^T \lambda_j [v_j]_{B_1} = \lambda_j v_i \cdot v_j = 0 \quad \text{car } v_1, \dots, v_n \text{ est une base orthonormée.}$$

□

10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental



Donc j'ai A qui multiplie v_i représenté par rapport à la base B_1 la transposée fois A , fois v_j par rapport à la base B_1 et je tourne ça, et maintenant j'ai $A^T A$ et comme le v_j était choisi être un vecteur propre pour la matrice $A^T A$ pour la valeur propre λ_j , ici j'ai v_i transposé B_1 λ_j qui multiplie le vecteur colonne v_j . Donc, maintenant le λ_j il passe devant, c'est un scalaire, j'ai à nouveau un produit scalaire, de deux vecteurs, et comme le v_1 jusqu'à v_n est une base orthonormée, quand j'ai le produit scalaire de v_i et v_j prenons i différent de j alors ceci donne 0, car $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base orthonormée, donc, effectivement ces vecteurs-là sont deux à deux orthogonaux, donc quand je prends une paire, les deux sont orthogonaux et donc j'ai une famille génératrice, qui est forcément linéairement indépendante. Et ça fait une base de l'image, c'est la fin de la preuve.

Notes

Summary



9m 47s

Exemple. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ par rapport aux bases canoniques. On a trouvé les valeurs singulières de $\phi : 5 \geq 3 \geq 0$. Trouver une base orthonormée (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ t.q. $(\phi(v_1), \phi(v_2))$ soit une base orthogonale de $\text{im}(\phi)$.

10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental



J'aimerais appliquer ça dans un exemple Je veux étudier l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ avec la matrice A par rapport aux bases canoniques. On a déjà étudié cet exemple dans la vidéo précédente, nous avons calculé les valeurs singulières donc on a trouvé 5, 3, et 0 Et maintenant j'aimerais mettre en pratique ce théorème qui dit que je peux trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que les images des deux premiers vecteurs, car j'écarte la valeur singulière 0 donc, que les images des deux premiers vecteurs soient une base orthogonale de l'image Cherchons des vecteurs propres de $A^T A$ ou bien $\phi^T \phi$ associé aux valeurs propres le carré de ça: 25 et 9.

Notes

Summary



11m 13s

Exemple. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ par rapport aux bases canoniques. On a trouvé les valeurs singulières de $\phi : 5 \geq 3 \geq 0$. Trouver une base orthonormée (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ t.q. $(\phi(v_1), \phi(v_2))$ soit une base orthogonale de $\text{im}(\phi)$.

Cherchons des vecteurs propres de $A^T A$ associés aux valeurs propres 25 et 9.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_1 = 25 , \quad \begin{pmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vecteur propre $(1, 1, 0)$.

$$\lambda_2 = 9 : \quad \begin{pmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur propre } (1/4, -1/4, 1)$$

10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental



donc les valeurs singulières sont toujours les racines carrées des valeurs propres de cette matrice-là J'avais déjà calculé le $A^T A$, c'était la matrice [voir écran] Je fais le calcul une fois pour la valeur propre $\lambda_1 = 25$ je soustrais 25 le long de la diagonale donc j'ai [voir écran] et puis quand vous échelonnez ça vous trouvez la matrice peut-être cette matrice-là une ligne de 0 en bas et puis on peut même avoir un 1 là et puis on trouve un vecteur propre, que la dernière coordonnée est égale à 0 et que les deux premières coordonnées doivent être égales donc vecteur propre $(1, 1, 0)$ Après je vais normaliser parce que je veux une base orthonormée et je fais maintenant $\lambda_2 = 9$ Je soustrais 9 le long de la diagonale et donc j'ai [voir écran] je fais l'échelonnage cette fois j'obtiens la matrice [voir écran] cette fois il y a un paramètre là et j'obtiens un vecteur propre qui est $(1/4, -1/4, 1)$ je vais reprendre cette information.

Notes

Summary



12m 12s

vecteur propre $w_1 = (1, 1, 0)$, $\lambda_1 = 25$
 $w_2 = (1/4, -1/4, 1)$, $\lambda_2 = 9$.

(w_1 et orthogonal à w_2)

Posons



10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental



Ici j'ai vecteur propre $w_1 = (1, 1, 0)$ pour la valeur propre $\lambda_1 = 25$ et le vecteur propre $w_2 = (1/4, -1/4, 1)$ pour la valeur propre $\lambda_2 = 9$ comme ce sont des vecteurs propres pour des valeurs distinctes pour une matrice symétrique ils devraient être orthogonaux et on fait le produit scalaire on a $1/4 - 1/4 + 0 = 0$ ça c'est juste, donc on remarque que w_1 est orthogonal à w_2 comme il faut, très bien. Et comme on cherche une base orthonormée je vais normaliser. Posons $v_1 = 1/\sqrt{2} w_1$ et v_2 égal à...

Notes

Summary



14m 09s

vecteur propre $w_1 = (1, 1, 0)$, $\lambda_1 = 25$
 $w_2 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1)$, $\lambda_2 = 9$.

(w_1 et orthogonal à w_2)

Parsons $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0)$
 $v_2 = \sqrt{\frac{8}{9}} (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1) = \frac{\sqrt{2}}{6} (1, -1, 4)$

$$\phi(v_1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On note que $\phi(v_1) \cdot \phi(v_2) = 0$.

$(\phi(v_1), \phi(v_2))$ est une base orthogonale de $\text{im } \phi$.

$$\phi(v_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{4\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental



ici j'ai $1/16 + 1/16 + 1$ donc $1/8 + 1$ donc j'aurai $9/8$ donc j'ai $\sqrt{8/9}$ qui multiplie $(1/4, -1/4, 1)$ que vais réécrire $\sqrt{2}/6$ fois $(1, -1, 4)$ Alors maintenant je regarde ϕ appliqué à v_1 c'est la matrice A qui multiplie le vecteur v_1 je retrouve $3/\sqrt{2} + 2/\sqrt{2} + 0$ donc $5/\sqrt{2}$ et ensuite $5/\sqrt{2}$ et puis $\phi(v_2)$ est égal à A qui multiplie v_2 cela donne $3\sqrt{2}/2$ et $-3\sqrt{2}/2$ Et ce que dit le théorème vous pouvez déjà vérifier qu'ils sont orthogonaux ces deux vecteurs donc là j'ai $15/2$ et là $-15/2$ donc on note que $\phi(v_1)$ produit scalaire avec $\phi(v_2)$ est égal à 0 et ça c'est une base orthogonale de l'image de ϕ . Si on regarde ce qui était vraiment demandé dans l'exemple, c'était de trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et ici on n'a que la première partie de cette base qui était nécessaire pour cette partie-là. Pour terminer j'aurais pu le faire déjà mais je voulais aller vers cette partie-là.

Notes

Summary



15m 10s

vecteur propre $w_1 = (1, 1, 0)$, $\lambda_1 = 25$
 $w_2 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1)$, $\lambda_2 = 9$.

(w_1 et orthogonal à w_2)

Parsons $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0)$
 $v_2 = \sqrt{\frac{5}{9}} (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1) = \frac{\sqrt{2}}{6} (1, -1, 4)$

$$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{4\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

On note que $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) = 0$.

$(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$ est une base orthogonale de $\text{im } \varphi$.

il reste à compléter (v_1, v_2) en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

On cherche un v.p. pour $A^T A$ de val. pr $\lambda_3 = 0$.

On trouve $(-2, 2, 1)$. On prend

$$v_3 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)$$

10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental

Maintenant il reste à compléter $\{v_1, v_2\}$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et puis on avait juste encore une valeur singulière qui était la valeur singulière 0. Donc la valeur propre 0 correspondant. On cherche un vecteur propre pour $A^T A$ de valeur propre $\lambda_3 = 0$. Je ne refais pas le calcul, vous êtes capables de faire ça, on cherche un vecteur propre pour la valeur propre de λ_3 . On trouve que le vecteur $(-2, 2, 1)$ est un vecteur propre. Je normalise. On prend v_3 , pour le troisième élément de la base $1/\sqrt{9}$, donc $1/3(-2, 2, 1)$ et vous pouvez vérifier que ça c'est orthogonal avec v_1 , donc j'ai $-2 + 2 + 0$ et là j'ai $-1/2 - 1/2 + 1$ c'est 0 et donc maintenant $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Voilà la base orthonormée telle que en prenant les deux premiers vecteurs dans cette base et les images de ça donnent une base orthogonale de l'image de ϕ . C'est ce qu'on appelle les bases compatibles.

Notes

Summary

