



10.13 Décomposition en valeurs singulières, exemple

Dans la vidéo précédente, nous avons démontré le théorème de décomposition en valeurs singulières, ça donne une factorisation d'une matrice quelconque. Maintenant j'aimerais appliquer ça à un exemple.

Notes

Summary



0m 04s

Exemple. Trouver la SVD (i.e. la décomposition en valeurs singulières) de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

D'abord on calcule les valeurs singulières de A : on cherche les valeurs propres de $A^T A$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix}; \quad c_{A^T A} = (t-10)(t-90).$$

valeurs propres sont $\lambda_1=90, \lambda_2=10$.
valeurs



10.13 Décomposition en valeurs singulières, exemple

J'aimerais trouver la décomposition en valeurs singulières de cette matrice là. Donc ici, je ne reprends pas la matrice que nous avons déjà étudiée avant mais une qui est un peu plus petite. Cela représente une application linéaire qui part de $\mathbb{R}^2$ et qui arrive dans $\mathbb{R}^3$. Je rappelle que ça ne pourrait pas être une application surjective parce que la dimension ici est trop petite. Maintenant pour démarrer la procédure, il nous faut des valeurs singulières. Il faut chercher les valeurs propres de la matrice $A^T A$. D'abord on calcule les valeurs singulières de A . On cherche d'abord les valeurs propres de la matrice $A^T A$. $A^T A$, je vous laisse calculer. C'est la matrice 2×2 . C'est donc 74, 32, 32, 26 donc symétrique. Si vous calculez le polynôme caractéristique, c'est pas difficile car on se rappelle de la formule. Alors ça se factorise, c'est $(t-10)(t-90)$. Donc les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1=90$ et $\lambda_2=10$. Je prends dans cet ordre là. Donc les valeurs singulières de A sont: $\Sigma_1 = \sqrt{90}$ et $\Sigma_2 = \sqrt{10}$.

Notes

Summary



0m 15s

Exemple. Trouver la SVD (i.e. la décomposition en valeurs singulières) de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}. \quad \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

D'abord on calcule les valeurs singulières de A : on cherche les valeurs propres de $A^T A$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix}; \quad \chi_{A^T A} = (t - 90)(t - 10).$$

valeurs propres sont $\lambda_1 = 90, \lambda_2 = 10$.
valeurs singulières de A sont $\sigma_1 = \sqrt{90}$ et $\sigma_2 = \sqrt{10}$.

Cherchons une base orthonormée de vecteurs propres pour $A^T A$:

$$\lambda_1 = 90: \begin{pmatrix} -16 & 32 \\ 32 & -64 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur propre } (2, 1), \text{ de norme } 1, \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$$

$$\lambda_2 = 10: \begin{pmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur propre } \begin{pmatrix} -1/2, 1 \end{pmatrix} \text{ de norme } 1, \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2).$$

ou $(-1, 2)$



10.13 Décomposition en valeurs singulières, exemple

Ici il n'y a pas de valeur singulière nulle. Maintenant je dois trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres pour cette matrice là. Cherchons une base orthonormée de vecteurs propres pour $A^T A$. Cela existe parce que c'est une matrice symétrique. Pour la valeur propre λ_1 je soustrais 90 le long de la diagonale. Là j'ai -16, 32, 32, -64. Là je divise par 2, j'ai -1 2 là aussi j'ai 1 -2 donc j'ai une ligne de 0 et donc un vecteur propre. On pourrait prendre le vecteur (2, 1). Et puis on normalise. De norme 1, je prendrais le vecteur $1/\sqrt{5}$ fois ce vecteur. Pour la valeur propre $\lambda_2 = 10$, je soustrais 10 le long de la diagonale. Quand je fais des opérations élémentaires j'obtiens 2, 1, 0, 0. Donc cette fois un vecteur propre, on pourrait prendre (1, -1/2) ou bien même si je multiplie par 2: (-1, 2) et puis de norme 1 j'aurai $1/\sqrt{5}(-1, 2)$ J'ai une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. On vérifie l'orthogonalité, c'est juste et ils sont de norme 1, formés de vecteurs propres pour cette matrice là.

Notes

Summary



Base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ $B_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2) \right)$.

Base orthogonale de $\text{im} \phi$: $A \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 3\sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base orthogonale de $\text{im} \phi = \left((3\sqrt{5}, 0, 3\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}) \right)$.

On normalise : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \right)$ une base orthonormale de $\text{im} \phi$.

On complète



10.13 Décomposition en valeurs singulières, exemple



Maintenant, qu'est-ce qu'on fait avec? Donc base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, je redis, j'appelle ça B_1 , j'ai $1/\sqrt{5}(2, 1)$, $1/\sqrt{5}(-1, 2)$, voilà une base. Maintenant on obtient une base orthogonale de l'image de ϕ en faisant A fois ces vecteurs là. Je fais le calcul. J'obtiens $3\sqrt{5}$ qui multiplie le vecteur $(1, 0, 1)$ et quand je fais le deuxième, cette fois je ne donne pas tous les détails. $-1/\sqrt{5}$, $2/\sqrt{5}$ et puis j'obtiens: $\sqrt{5}(-1, 0, 1)$ et puis vous vérifiez que effectivement là on a deux vecteurs qui sont orthogonaux. Donc le produit scalaire est égal à 0. Ce ne sont pas des vecteurs de norme 1. C'est quand même une base orthogonale de l'image. Base orthogonale de l'image. Maintenant je vais normaliser. Je divise chaque vecteur par sa norme. Donc ici la norme c'est... je fais le calcul et je trouve que c'est... de toute façon c'est un multiple de ça... $1/\sqrt{2}(1, 0, 1)$, donc ça c'est de norme 1 et $1/\sqrt{2}(-1, 0, 1)$. Donc ça c'est une base orthonormale de l'image de ϕ . Maintenant il faut étendre ça à une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. On complète.

Notes

Summary



4m 03s

Base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ $B_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2) \right)$.

Base orthogonale de $\text{im } \varphi$: $A \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 3\sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base orthogonale de $\text{im } \varphi = \left((3\sqrt{5}, 0, 3\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}) \right)$.

On normalise : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \right)$ une base orthonormale de $\text{im } \varphi$.

On complète en une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), (0, 1, 0) \right)$.

10.13 Décomposition en valeurs singulières, exemple



Normalement pour trouver la suite de la base, ça peut être un calcul parce qu'il faut résoudre des équations mais ici on voit facilement que je peux juste rajouter un vecteur de la base canonique qui sera $(0, 1, 0)$ car c'est orthogonal à ce vecteur là et aussi à ce vecteur là. Maintenant j'ai une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et qui sont compatibles dans le sens décrit par le théorème de l'existence des bases compatibles.

Notes

Summary



Base orthonormée de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2) \right)$

Base orthonormée de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), (0, 1, 0) \right)$

Valeurs singulières : $\sqrt{90}, \sqrt{10}$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\phi\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)\right) = 3\sqrt{5}(1, 0, 1) = 3\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

$$\phi\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)\right) = \sqrt{5}(-1, 0, 1) = \sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

$$[\phi]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{90} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma$$

$$A = [\phi]_{\mathcal{C}_2 \mathcal{C}_1} = [id]_{\mathcal{C}_2 \mathcal{B}_2} [\phi]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} [id]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{C}_1}$$



10.13 Décomposition en valeurs singulières, exemple

Je reprends cette information: une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, j'avais des valeurs singulières, $\sqrt{90}$ et $\sqrt{10}$ et la matrice A . Je rappelle que ϕ appliqué à ce premier vecteur de base, ça donnait [voir écran]. Maintenant si je représente ϕ par rapport à ces deux bases là, $\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2$, j'aurai... donc ça envoie le premier vecteur de base à $3\sqrt{10}$ fois le premier vecteur de cette base-là. ça envoie le deuxième vecteur de cette base à $\sqrt{10}$ fois le deuxième vecteur de cette base. Et c'est effectivement la matrice [voir écran]. Et ça c'est le Σ . C'est la forme diagonale de cette matrice. Et puis A c'est ϕ par rapport aux bases canoniques du début. On sait que ça doit être... On met Σ au milieu. On doit faire des changements de bases appropriés. Je vais commencer avec $\mathcal{C}_1$. Je veux le transformer en $\mathcal{B}_1$. Je veux reprendre avec $\mathcal{B}_2$ et la transformer en $\mathcal{C}_2$. Je dois poser U égal à la matrice identité $\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2$.

Notes

Summary



Base orthonormée de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2) \right)$

Base orthonormée de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), (0, 1, 0) \right)$

Valeurs singulières : $\sqrt{90}, \sqrt{10}$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)\right) = 3\sqrt{5}(1, 0, 1) = 3\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)\right) = \sqrt{5}(-1, 0, 1) = \sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

$$[\varphi]_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{90} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma$$

$$A = [\varphi]_{\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1} = [id]_{\mathcal{C}_2, \mathcal{B}_2} [\varphi]_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} [id]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1} ; U = [id]_{\mathcal{C}_2, \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = [id]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1} ; V = [id]_{\mathcal{C}_1, \mathcal{B}_1}^{-1} = [id]_{\mathcal{C}_1, \mathcal{B}_1}^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$



10.13 Décomposition en valeurs singulières, exemple

Donc j'écris la deuxième base en termes de la base canonique. C'est celui qui est facile à faire. C'est [voir écran] Et puis le V , j'aimerais cette matrice là $B_1 C_1$, qui est l'inverse d'une matrice qui est plus facile à calculer. Donc V est égal à l'inverse de cette matrice là. Comme cette matrice va être une matrice orthogonale, parce que ça envoie une base orthonormée vers une base orthonormée Alors ce serait la transposée de cette matrice là. Mais ça c'est une matrice qui est facile à écrire. Donc la matrice qui écrit B_1 , en termes de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ J'ai [voir écran].

Notes

Summary



On vérifie que

$$U \Sigma V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \square$$

10.13 Décomposition en valeurs singulières, exemple



J'obtiens enfin V [voir écran] Enfin on vérifie que si je fais $U \Sigma V$, je repose des matrices, le Σ c'était la matrice de la même forme que A aussi diagonale que possible avec les valeurs singulières et puis V c'était cette matrice là. J'ai fait tous les calculs. Effectivement, j'obtiens la matrice $(7, 1, 0, 0, 5, 5)$

Notes

Summary



10m 03s