



5.0 Quelques rappels sur les applications

Aujourd'hui nous commençons un nouveau chapitre et, ayant introduit les espaces vectoriels, étudié la structure de ces espaces, et parlé des bases de ces espaces, nous allons maintenant étudier les applications d'un espace vers un autre. Avant de faire cela, j'aimerais rappeler certaines choses concernant les applications entre des ensembles. Ce sont des généralités.

Notes

Summary



0m 04s

Définition. Soient X et Y deux ensembles. Une **application** (ou une fonction) de X dans Y est une règle qui associe à chaque $x \in X$ un unique élément, noté $f(x)$, de Y .

X est l'ensemble de départ.

Y est l'ensemble d'arrivée.

Notation: $f: X \rightarrow Y$.

$x \in X$, $f(x)$ s'appelle l'image de x par f .

exemples ① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$.

② $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$
 $g(n) = \frac{n}{2}$.

5.0 Quelques rappels sur les applications



Je rappelle : je me donne deux ensembles X et Y . Une application ou bien une fonction de X dans Y est une règle qui associe à chaque x dans X un unique élément de Y . Nous noterons cet élément par $f(x)$. D'autres terminologies associées : le X ici est appelé l'ensemble de départ. On dit parfois que c'est le domaine de définition de la fonction ou de l'application. Le Y est l'ensemble d'arrivée de l'application. Une notation que l'on utilise est $f: X \rightarrow Y$. Cela signifie que f est une application qui part de X comme ensemble de départ et qui arrive dans Y , l'ensemble d'arrivée. Le $f(x)$ s'appelle l'image de x par f . Par exemple, nous pourrions avoir f qui part des nombres réels et qui arrive dans des nombres réels, et cela donne $f(x) = x^2$. C'est la règle qui est associée à x au carré. Deuxième exemple : g qui part de \mathbb{Z} (les entiers relatifs) et qui arrive dans des nombres rationnels. La fonction g prend un entier et il le divise par deux. Voilà deux exemples d'applications.

Notes

Summary



0m 29s

Définition. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application de X dans Y .

- (1) f est dite **injective** si à chaque fois que $f(x) = f(x')$ pour $x, x' \in X$ alors $x = x'$.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ nm injective car $f(1) = 1 = f(-1)$.

éléments distincts de X ont des images distinctes dans Y .

- (2) f est dite **surjective** si pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ t.q. $f(x) = y$.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, nm surjective car il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = -1$.

tout élément de Y est l'image (par f) d'un élément de X .

- (3) f est dite **bijective** si f est injective et surjective.

5.0 Quelques rappels sur les applications



Quand on a des applications, on a des propriétés que je vais énumérer ici. Dans cette définition, on dit que f est injective si, à chaque fois que f envoie x et x' au même endroit alors $x = x'$. Cela signifie que des éléments distincts ont des images distinctes. Donc les éléments distincts de X ont des images distinctes dans Y . On dit que f est surjective si, pour tout élément que je prends dans Y , il y a un x qui est envoyé dessus. Donc tout élément de Y est une image. Enfin, on dit que f est bijective si f est à la fois injective et surjective. Par exemple ici, si je prends $f(x) = x^2$, donc ici $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ça c'est l'exemple qu'on avait dans le tableau précédent, alors ceci est non injectif car $f(1) = 1 = f(-1)$. Donc ici j'ai deux éléments distincts des nombres réels et je les envoie au même endroit, donc f n'est pas injective. Si je prends la même application, ce n'est pas non plus surjectif, car il n'existe aucun x tel que $f(x) = -1$. Maintenant, un exemple d'une application bijective dont on aura besoin fréquemment.

Notes

Summary



2m 01s

Définition. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application de X dans Y .

- (1) f est dite **injective** si à chaque fois que $f(x) = f(x')$ pour $x, x' \in X$ alors $x = x'$.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ nm injective car $f(1) = 1 = f(-1)$.

éléments distincts de X ont des images distinctes dans Y .

- (2) f est dite **surjective** si pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ t.q. $f(x) = y$.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, nm surjective car il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = -1$.

tout élément de Y est l'image (par f) d'un élément de X .

- (3) f est dite **bijjective** si f est injective et surjective.

$$id_X : X \rightarrow X, id(x) = x.$$

l'application identité.

5.0 Quelques rappels sur les applications



Si je me donne un ensemble X et je définis id_X de X dans X , c'est l'application identité donc cela envoie un petit x à lui-même et on appelle cette application, l'application identité. Si le contexte est clair, parfois on ne mettra pas le " X " après le id , car on sait où on travaille mais en général on le met pour être très clair.

Notes

Summary



3m 58s

Définition. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$.

On note $g \circ f : X \rightarrow Z$ l'application définie par

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$, la **composition** de f et g .

example

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad f(n) = \frac{n}{2}.$$

$$g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^2.$$

5.0 Quelques rappels sur les applications



Maintenant quand nous avons des applications, on peut aussi les mettre ensemble de façon différente tout dépendant de la structure des ensembles, mais si on a une application f qui part de X et qui arrive dans Y et une autre g qui part de Y et qui arrive dans Z , on peut former une application qui s'appelle la composition de f et g . Elle est définie ici (voir écran) donc on prend un élément de X , on l'envoie à $f(x)$, maintenant c'est dans Y donc je sais comment prendre $f(x)$ et l'envoyer dans Z . Par exemple, si je prends des applications, disons $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, qu'on avait avant (avec $f(n) = n/2$) et peut-être ensuite un $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, qui est $g(a/b) = (a/b)^2$. (On rappelle que les éléments de \mathbb{Q} sont des fractions) Qu'est-ce que je peux faire ? Je pars de \mathbb{Z} et j'arrive dans \mathbb{Q} et ensuite je suis envoyée dans \mathbb{R} donc je fais en premier f , ensuite g et je l'applique à un entier n . C'est $g(f(n))$, donc c'est $g(n/2)$ qui est $(n/2)^2$. Donc ça c'est la composition. Une des propriétés de cette composition dont nous aurons besoin est donnée dans la proposition suivante.

Notes

Summary



4m 26s

Proposition. Une application $f : X \rightarrow Y$ de X dans Y est bijective si et seulement s'il existe une application $g : Y \rightarrow X$ de Y dans X t.q. $f \circ g = \text{id}_Y$ et $g \circ f = \text{id}_X$.

Preuve de \Rightarrow

On suppose $f: X \rightarrow Y$ une application bijective. f est surjective.

Sont $y \in Y$, il existe $x \in X$ t.q. $f(x) = y$.
 f est injective, donc x est l'unique



5.0 Quelques rappels sur les applications

Cette proposition nous donne un critère pour déterminer si une application entre X et Y est bijective ou non. Une application d'un ensemble X vers un ensemble Y est bijective si et seulement si il existe une application dans l'autre sens, tel que les deux compositions sont égales à l'application identité. Je vais démontrer une partie de cette proposition, pas les deux implications, seulement une des deux et ceci sera très utile. Nous utiliserons les deux implications. On utilise l'équivalence. Preuve : je vais démontrer l'implication " \Rightarrow ". Je vais supposer que f est bijective et je vais vous montrer comment on définit le g (l'implication inverse). Alors, comme f est bijective, f est surjective. Donc si je prends un y dans Y , il existe un x dans X , tel que $f(x) = y$. Comme f est aussi injective, f ne peut pas envoyer deux éléments différents sur y donc le x précédent est unique. En fait, x est l'unique élément de X tel que $f(x) = y$, donc cela me donne la possibilité de bien définir une application dans l'autre sens donc on définit une application g avec ensemble de départ Y qui arrive dans X par $g(y) = x$.

Notes

Summary



5m 59s

Proposition. Une application $f : X \rightarrow Y$ de X dans Y est bijective si et seulement s'il existe une application $g : Y \rightarrow X$ de Y dans X t.q. $f \circ g = \text{id}_Y$ et $g \circ f = \text{id}_X$.

Preuve de \Rightarrow

On suppose $f: X \rightarrow Y$ une application bijective. f est surjective.

Sont $y \in Y$, il existe $x \in X$ t.q. $f(x) = y$.
 f est injective, donc x est l'unique élément de X t.q. $f(x) = y$.

On définit $g: Y \rightarrow X$ par
 $g(y) = x$.

5.0 Quelques rappels sur les applications



Je me suis donné un y quelconque, je sais qu'il existe un unique x tel que $f(x) = y$ donc je définis l'application g , il va prendre le y et l'envoyer sur x . Ensuite on peut vérifier le reste : que les compositions sont égales à l'identité. Je ne ferai pas. La démonstration dans l'autre direction, ce n'est pas si difficile. C'était pour vous donner l'idée de comment on utilise la bijectivité pour construire cette application. Dans la vidéo suivante, nous dirons quelles sont les applications qui conviennent aux espaces vectoriels.

Notes

Summary



7m 44s