



5.1 Applications linéaires d'espaces vectoriels



Nous arrivons maintenant à la partie du cours où, au lieu de seulement étudier les espaces vectoriels, nous allons étudier les applications entre les espaces vectoriels. Les applications qui conviennent s'appellent les applications linéaires. Je donne la définition puis je vais tout écrire parce que j'aimerais en donner l'illustration lentement.

Notes

Summary



0m 04s

Définition Soient V, W des \mathbb{R} -espaces vectoriels. Soit $T: V \rightarrow W$ une application. On dit que T est une application \mathbb{R} -linéaire (ou simplement "linéaire") si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour $u, v \in V$ on a

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v).$$

Diagram illustrating the linearity condition with annotations:

- λ is labeled "mult. scalaire dans V " (scalar multiplication in V).
- $u + v$ is labeled "+ dans V " (addition in V).
- $\lambda T(u)$ is labeled "mult. scalaire dans W " (scalar multiplication in W).
- $T(u) + T(v)$ is labeled "+ dans W " (addition in W).

5.1 Applications linéaires d'espaces vectoriels



Regardez bien les composantes de la définition. Je me donne deux \mathbb{R} -espaces vectoriels. J'ai dit deux, en fait on peut avoir $W = V$ donc je me donne des espaces, des \mathbb{R} espaces vectoriels. Je me donne une application de V dans W . On dit que T est une application \mathbb{R} -linéaire. Parfois, on laisse tomber le \mathbb{R} et on dit simplement linéaire, si, et voilà la condition : pour tout λ dans \mathbb{R} , et pour tout u et v dans V , on a $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$. Je souligne ici certaines choses. On dit que T est une application \mathbb{R} -linéaire donc c'est ce qu'on est en train de définir. Parfois on dit simplement une application linéaire. Une autre chose que j'aimerais souligner c'est le $+$ là, ça c'est le $+$ dans l'espace V . Et cette multiplication scalaire ici, c'est la multiplication scalaire dans V . De l'autre côté, ce $+$ là est le $+$ dans l'espace d'arrivée. Cette multiplication scalaire là, c'est la multiplication scalaire dans W . On se permet de ne pas alourdir la notation en mettant différentes notations pour le $+$ là et le $+$ à droite.

Notes

Summary



Définition Soient V, W des \mathbb{R} -espaces vectoriels. Soit $T: V \rightarrow W$ une application.
On dit que T est une application \mathbb{R} -linéaire (ou simplement "linéaire") si
pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour $u, v \in V$ on a

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v).$$

Diagram annotations:
 - λ is labeled "mult. scalaire dans V " with an arrow pointing to $\lambda u + v$.
 - $u + v$ is labeled "+ dans V " with an arrow pointing to $\lambda u + v$.
 - $\lambda T(u)$ is labeled "mult. scalaire dans W " with an arrow pointing to λ .
 - $T(u)$ is labeled "+ dans W " with an arrow pointing to $T(u)$.
 - $T(v)$ is labeled "+ dans W " with an arrow pointing to $T(v)$.

Premiers constats : ① $T: V \rightarrow W$ est une application linéaire \Leftrightarrow

- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$, $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, et
- pour tout $u, v \in V$, $T(u+v) = T(u) + T(v)$

5.1 Applications linéaires d'espaces vectoriels



Il faut bien savoir qu'ici ce sont des opérations qui se passent dans V et que là ce sont des opérations qui se passent dans W . D'autres constats que l'on peut faire tout de suite après la définition : Premièrement, T est linéaire si et seulement si elle satisfait à d'autres conditions... ça c'est la définition que j'en ai donné mais on peut donner une autre définition équivalente. Donc $T: V \rightarrow W$ est une application linéaire si et seulement si... puis au lieu de donner une seule condition on pourrait donner deux conditions : si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et $v \in V$, on a $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ et pour tout $u, v \in V$, on a $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

Notes

Summary



2m 10s

Définition Soient V, W des \mathbb{R} -espaces vectoriels. Soit $T: V \rightarrow W$ une application. On dit que T est une application \mathbb{R} -linéaire (ou simplement "linéaire") si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour $u, v \in V$ on a

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v).$$

mult. scalaire dans V
+ dans V
+ dans W

Premiers constats : ① $T: V \rightarrow W$ est une application linéaire \Leftrightarrow

- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$, $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, et
- pour tout $u, v \in V$, $T(u+v) = T(u) + T(v)$

$$\Leftrightarrow \text{pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } u, v \in V \text{ on a } T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

② Soient $0_V, 0_W$ les vecteurs nuls dans V , resp. W .
 $T(0_V) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0_W$.

5.1 Applications linéaires d'espaces vectoriels



Notes

Donc on pourrait séparer la linéarité ici en deux conditions, si vous préférez vérifier deux conditions séparément. C'est aussi si et seulement si, car parfois les gens aiment bien remarquer la chose suivante, si et seulement si, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour tout $u, v \in V$, on a que $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$. Il n'y a en principe aucune raison de vérifier cela, cela serait plus compliqué que ce qu'on a écrit là-haut, mais toutes ces définitions sont équivalentes. Deuxième constat, qui est important : Soit $0_V, 0_W$, les vecteurs nuls dans V respectivement W . Qu'est-ce que T va faire au vecteur 0_V ? Je prends T linéaire. Donc qu'est-ce que T va faire à ce vecteur-là ? On a déjà vu que le vecteur nul, c'est la même chose que 0 , le scalaire, fois n'importe quel vecteur dans V . Comme T est linéaire, je peux sortir le scalaire et de nouveau, 0 fois n'importe quel vecteur, ça donne le vecteur nul. Donc si T est linéaire, elle doit forcément envoyer le vecteur nul dans V sur le vecteur nul dans W . C'est une propriété très importante.

Summary



Définition Soient V, W des \mathbb{R} -espaces vectoriels. Soit $T: V \rightarrow W$ une application. On dit que T est une application \mathbb{R} -linéaire (ou simplement "linéaire") si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour $u, v \in V$ on a

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v).$$

mult. scalaire dans V
+ dans V
mult. scalaire dans W
+ dans W

Premiers constats : ① $T: V \rightarrow W$ est une application linéaire \Leftrightarrow

- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$, $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, et
- pour tout $u, v \in V$, $T(u+v) = T(u) + T(v)$

$$\Leftrightarrow \text{pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } u, v \in V \text{ on a } T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

② Soient $0_V, 0_W$ les vecteurs nuls dans V , resp. W .

$$T(0_V) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0_W.$$

③ $T(-v) = T(-1 \cdot v) = -1 T(v) = -T(v)$

5.1 Applications linéaires d'espaces vectoriels



Enfin, le troisième constat, qui sera utile : on peut aussi demander, qu'est ce T va faire au vecteur $-v$? On a montré au début avec les espaces vectoriels que le $-v$ est la même chose que $-1 \cdot v$. C'est l'inverse additif de v . C'est la même chose que -1 , le scalaire fois v . Comme on peut sortir les scalaires, quand on a une application linéaire, on a $-1T(v)$, et ceci est la même chose que $-T(v)$. Ce sont deux propriétés très utiles. La linéarité implique que le zéro est envoyé vers le zéro et les inverses dans V sont envoyés aux inverses des images dans W .

Notes

Summary



Proposition. Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie avec base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Soient W un \mathbb{R} -espace vectoriel et $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors T est déterminée par les images $T(v_1), \dots, T(v_n)$, i.e. si $S : V \rightarrow W$ est une application linéaire avec $S(v_i) = T(v_i)$ pour $1 \leq i \leq n$, alors $S = T$.

Preuve Soient T et S des applications \mathbb{R} -linéaires de V dans W telles que
 $S(v_i) = T(v_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

5.1 Applications linéaires d'espaces vectoriels



Maintenant une autre propriété, qui est donnée par la linéarité et qui est aussi très utile. Vous verrez que beaucoup de choses sont facilitées quand l'application est linéaire. Je me donne un R -espace vectoriel et je suppose cette fois qu'il est de dimension finie. Je fixe une base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Ensuite je me donne un autre R -espace vectoriel que je vais définir, et une application linéaire T . Le T est complètement déterminé par les images de cette base. Par cela, je veux dire que si je me donne une autre application linéaire, $S : V \rightarrow W$, qui envoie v_i au même endroit que T , alors $S = T$. Dès que je vous dis où T envoie une base, je connais l'application. Pour la preuve, je me donne un S avec ces propriétés. Soit T et S , des applications linéaires de V dans W telles que $S(v_i) = T(v_i)$ et cela, pour tout i . Ce qu'il faut montrer, pour l'énoncé ici, c'est que ces deux applications ont la même image pour tout $v \in V$: $S(v) = T(v)$ pour tout $v \in V$. Donc je me donne ce v , comme ceci est une base, je sais que je peux écrire v comme une combinaison linéaire de ces éléments-là.

Notes

Summary



5m 39s

Proposition. Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie avec base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Soient W un \mathbb{R} -espace vectoriel et $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors T est déterminée par les images $T(v_1), \dots, T(v_n)$, i.e. si $S : V \rightarrow W$ est une application linéaire avec $S(v_i) = T(v_i)$ pour $1 \leq i \leq n$, alors $S = T$.

Preuve Soient T et S des applications \mathbb{R} -linéaires de V dans W telles que
 $S(v_i) = T(v_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Il faut montrer que $S(v) = T(v)$ pour tout $v \in V$.

Soit $v \in V$. Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.q. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$
 $S(v) = S(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 S(v_1) + S(\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 S(v_1) + \alpha_2 S(v_2) + \dots + \alpha_n S(v_n)$
 $= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = T(v)$
 Donc $S = T$.

5.1 Applications linéaires d'espaces vectoriels



Soit $v \in V$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, des nombres réels, tel que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Maintenant j'applique S à ce v : $S(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)$. qui est égal, par la linéarité, à $\alpha_1 S(v_1) + \dots + \alpha_n S(v_n)$. Maintenant j'utilise la linéarité de nouveau : j'ai $\alpha_1 S(v_1) + \alpha_2 S(v_2) + \dots + \alpha_n S(v_n)$. Vous voyez qu'après quelques étapes, je trouverai $\alpha_1 S(v_1) + \alpha_2 S(v_2) + \dots + \alpha_n S(v_n)$. Je peux tout décomposer. Ensuite, par hypothèse, je sais qu'à chaque fois, $S(v_i) = T(v_i)$. Donc j'ai $\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n)$. Ensuite, par la même procédure, je peux tout remettre ensemble, parce que T est aussi linéaire, ça c'est $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)$ et ça c'est $T(v)$. Donc on a commencé avec un v quelconque et on arrive à voir que $S(v) = T(v)$ donc, les deux applications sont les mêmes. C'est la fin de la preuve. C'est une bonne propriété de linéarité. Je vous donne une application linéaire, je vous donne une base et vous me dites où vont les éléments de la base ce qui m'indique où vont tous les vecteurs de l'espace.

Notes

Summary

