



5.2 Exemples géométriques

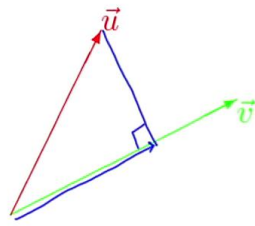
Maintenant je donnerai beaucoup d'exemples d'applications linéaires pour vous convaincre que ces applications linéaires sont naturelles, ce sont les applications qu'on aimerait étudier, et aussi pour vous montrer qu'elles apparaissent dans plusieurs sujets différents : la géométrie, l'analyse et notamment l'algèbre. Commençons par des exemples géométriques.

Notes

Summary



0m 05s



\vec{v} un vecteur fixe dans \mathbb{R}^2 .
 On définit $\text{proj}_v(u)$ d'être la
 projection orthogonale de u sur v .
 Donc $\text{proj}_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Preuve que



5.2 Exemples géométriques



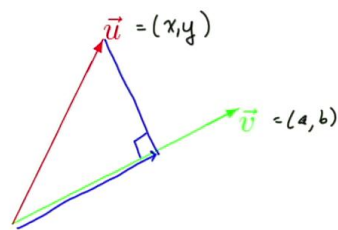
Je me donne deux vecteurs dans \mathbb{R}^2 et je vais décrire une application qui va faire la projection de n'importe quel vecteur u sur un vecteur v qui est fixe. Je vais prendre v comme un vecteur fixe dans \mathbb{R}^2 bon je pourrais le faire dans \mathbb{R}^3 mais dans \mathbb{R}^2 c'est plus facile à illustrer. L'application que je souhaite définir est l'application qui va projeter un vecteur u orthogonalement, donc là je me donne un angle droit, et l'image sera ce vecteur-là. On définit : la projection sur v de u comme la projection orthogonale du vecteur u sur le vecteur v . Bon je vais laisser tomber les flèches parce que c'est très lourd à écrire. Ce sont les vecteurs dans \mathbb{R}^2 . Ça me donne une application bien définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . Donc proj_v est une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . C'était l'exemple. J'aimerais vous convaincre que cette application est une application linéaire. Cela sera un peu long. Je commence. Preuve que cette application est une application \mathbb{R} -linéaire.

Notes

Summary



0m 30s



\vec{v} un vecteur fixe dans \mathbb{R}^2 .

On définit $\text{proj}_v(u)$ d'être la projection orthogonale de u sur v .

Donc $\text{proj}_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Preuve que $\text{proj}_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application \mathbb{R} -linéaire. C'est clair que

$\text{proj}_v(u) = \alpha v$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ (qui dépend de u).

En termes des coordonnées: $v = (a, b)$, $u = (x, y)$. $\alpha v = (\alpha a, \alpha b)$.

Pente de la droite entre (x, y) et $(\alpha a, \alpha b)$ est égale à $\frac{\alpha b - y}{\alpha a - x}$



5.2 Exemples géométriques

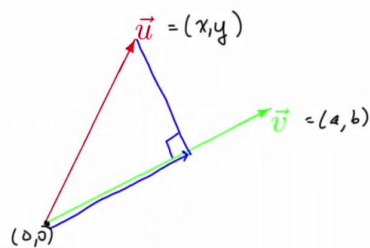
On sait, d'après le dessin, que $\text{proj}_v(u)$ est un vecteur qui est un multiple de v parce qu'on le projette sur le vecteur v . Dans l'exemple, la projection est plus courte que v , ça pourrait être plus long. Il est clair que $\text{proj}_v(u) = \alpha v$ pour un scalaire α qui va dépendre de u . Donc je dois trouver le α et dès que je trouve le α j'aurai bien défini l'application. En termes des coordonnées, je vais fixer le v et je vais prendre $u = (x, y)$ ce sont des variables. Donc $\alpha v = (\alpha a, \alpha b)$. Maintenant je vais faire un peu de géométrie dans le plan pour trouver le α . Je cherche la pente de la droite donnée par u . Je note $u = (x, y)$ et $v = (a, b)$ et le dernier vecteur c'est $\alpha(a, b)$. La pente de la droite entre (x, y) et $(\alpha a, \alpha b)$, c'est bon vous savez comment calculer la pente, c'est $(\alpha b - y)/(\alpha a - x)$. Puis la pente de la droite entre le point $(0, 0)$ que je peux imaginer être ici (en fait, je peux placer mes vecteurs où je veux) et le point (a, b) , donc cette droite-là, ça donne b/a .

Notes

Summary



2m 05s



\vec{v} un vecteur fixe dans \mathbb{R}^2 .

On définit $\text{proj}_v(u)$ d'être la projection orthogonale de u sur v .

Donc $\text{proj}_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Preuve que $\text{proj}_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application \mathbb{R} -linéaire. C'est clair que

$\text{proj}_v(u) = \alpha v$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ (qui dépend de u).

En termes des coordonnées: $v = (a, b)$, $u = (x, y)$. $\alpha v = (\alpha a, \alpha b)$.

Pente de la droite entre (x, y) et $(\alpha a, \alpha b)$ est égale à $\frac{\alpha b - y}{\alpha a - x}$

Pente de la droite entre $(0, 0)$ et $(a, b) = \frac{b}{a}$.

(on suppose droites non verticales)

On doit avoir $\frac{\alpha b - y}{\alpha a - x} = -\frac{a}{b}$. Donc $b(\alpha b - y) = -a(\alpha a - x)$.
 $\alpha = \frac{ax + by}{a^2 + b^2}$

5.2 Exemples géométriques



Donc j'ai une cette droite-là, sa pente est donnée par cette formule, et une fois cette droite-là et sa pente est donnée par cette formule. Je suppose dans les deux cas que je n'ai pas des pentes non-définies. Si c'est une droite verticale je ne peux pas parler de la pente, donc je suppose que les deux droites sont non-verticales. On peut faire ce cas-là, c'est pareil. On suppose une droite non-verticale. Maintenant, quand j'ai deux droites qui sont orthogonales, c'est-à-dire perpendiculaires, qui forment un angle rectangle ou droit, alors la relation entre les pentes est que la pente de l'une est la négative de la réciproque de l'autre. Donc on doit voir que $(\alpha b - y)/(\alpha a - x) = -a/b$. Cela me donne une relation qui me permet de trouver α . Cela implique que $b(\alpha b - y) = -a(\alpha a - x)$, je résous l'expression pour α et je trouve que $\alpha = (ax + by)/(a^2 + b^2)$. Il a suffit de faire un peu de simplification sur l'équation précédente. Je reprends dans la prochaine slide.

Notes

Summary



Rappel. On a $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = (\alpha a, \alpha b) = \left(\frac{ax+by}{a^2+b^2} a, \frac{ax+by}{a^2+b^2} b \right)$

Question: Cette application est-elle \mathbb{R} -linéaire?

$$\text{proj}_v(u) = \frac{1}{a^2+b^2} (a^2x+aby, abx+b^2y) .$$

5.2 Exemples géométriques



Nous avons trouvé α . Donc nous savons que la projection de u sur v , qui est égale à αv (c'est un multiple du vecteur v), donc c'est exactement l'expression précédente. Nous n'avons pas encore terminé. Nous n'avons pas encore réussi à montrer que l'application est linéaire mais ceci va nous aider. Toujours est-il, la question : cette application est-elle \mathbb{R} -linéaire ? Je vais vous donner un truc plus général. Si je développe un tout petit peu, j'ai que $\text{proj}_v(u) =$ (je vois que je peux sortir le $a^2 + b^2$) donc j'obtiens [voir écran] En fait, cette application s'écrit comme : dans la première composante, je mets des combinaisons linéaires des coordonnées de u et dans la seconde, j'ai les combinaisons linéaires des coordonnées de u aussi. Donc ce que je vais montrer c'est que n'importe quelle application qui est définie comme ceci, de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , est une application linéaire. Au lieu de faire ce cas particulier je vais faire un cas plus général, et c'est ce que j'énoncerai dans la prochaine slide.

Notes

Summary



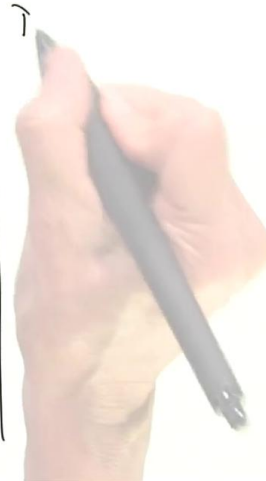
5m 34s

Proposition. Soient $c, d, e, f \in \mathbb{R}$ et $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $T((x, y)) = (cx + dy, ex + fy)$. Alors T est une application linéaire.

Preuve (Astuce)

Posons $A = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors } A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix}$$



5.2 Exemples géométriques



Voici l'énoncé général qui sera utile car ensuite je pourrai l'appliquer à différentes applications. Je me donne quatre nombres réels et je définis une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 en termes des coordonnées donc je prends (x, y) un vecteur dans \mathbb{R}^2 et je vais envoyer ça dans \mathbb{R}^2 où je fais une combinaison linéaire de x et de y dans chacune des composantes. C'est exactement ce qu'on a vu dans la projection. Maintenant, je prétends que cette application est \mathbb{R} -linéaire. Preuve : Il y a une astuce ici. Il y aura d'autres preuves où je commence vraiment avec la définition mais il y a une petite astuce ici et cela va aussi vous montrer à quel point les matrices sont utiles. Posons A la matrice [voir écran] Vous ne voyez pas pourquoi cela va marcher mais je le montre tout de suite. Si je multiplie cette matrice par le vecteur (x, y) , j'obtiens [voir écran] J'ai exactement les coordonnées de ces vecteurs-là. C'est pour ça que j'ai posé cette matrice. Cela implique que T appliquée au vecteur (x, y) , c'est la multiplication précédente, mais ensuite je dois encore tourner le vecteur, donc je fais la transposée.

Notes

Summary



Proposition. Soient $c, d, e, f \in \mathbb{R}$ et $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $T((x, y)) = (cx + dy, ex + fy)$. Alors T est une application linéaire.

Preuve de la linéarité de T :

Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$T(\lambda u + v) = (\lambda u + v)A^T = \lambda uA^T + vA^T = \lambda T(u) + T(v).$$

Donc T est \mathbb{R} -linéaire.

On conclut que $\text{proj}_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application \mathbb{R} -linéaire.

Preuve (Astuce)

Posons $A = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

Alors $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix}$

Donc $T((x, y)) = (A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})^T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A^T = (x \ y) A^T$

5.2 Exemples géométriques

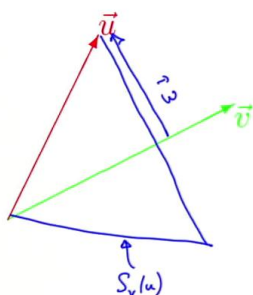


On a vu comment fonctionne la transposée, on a donc [voir écran] Il sera donc facile de voir que c'est linéaire donc ça c'est l'astuce. Preuve de linéarité : donc qu'est-ce que je dois faire pour montrer que T est linéaire ? Je dois prendre deux vecteurs et un scalaire. Soient u et v dans \mathbb{R}^2 et un scalaire λ réel. Donc je fais $T(\lambda u + v)$. Par la formule précédente, c'est la même chose que $(\lambda u + v)A^T$, qui est égal à $\lambda uA^T + vA^T$ et ça c'est égal à $\lambda T(u) + T(v)$. Donc ici, j'ai montré que faire la combinaison linéaire en premier et appliquer le T , c'est la même chose qu'appliquer T et ensuite faire la combinaison linéaire. Donc par définition, ceci dit que T est \mathbb{R} -linéaire. Et comme la projection était de cette forme-là, je conclus que la projection sur v est une application \mathbb{R} -linéaire. C'était deux exemples. Donc nous avons fait la projection d'un vecteur sur un autre, donc on fixe un vecteur et on projette tous les autres vecteurs dessus : ceci est une application linéaire. En faisant cela, notre argument montre que n'importe quelle application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui est formée en faisant des combinaisons linéaires des coordonnées du vecteur est une application linéaire.

Notes

Summary





Fixons $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application
 $S_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, la symétrie orthogonale par rapport à \vec{v} .

$$\vec{u} = \text{proj}_{\vec{v}} u + \vec{w}$$

$$S_v(u) = \text{proj}_{\vec{v}} u - \vec{w}$$

5.2 Exemples géométriques



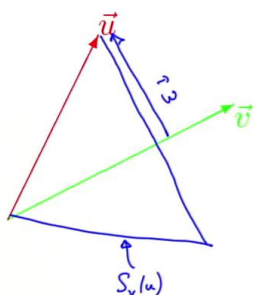
Maintenant, nous allons voir une autre application géométrique. Je fixe de nouveau v , un vecteur dans \mathbb{R}^2 et je définis une application. On considère l'application S_v (je ne mettrai pas la flèche) de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , qui est la symétrie orthogonale par rapport à v . Ici c'est dans \mathbb{R}^2 donc cela signifie que je vais balancer u de l'autre côté, donc je trace une ligne orthogonale ici et je vais balancer u de l'autre côté symétriquement, et ça c'est ce vecteur-là, le $S_v(u)$. J'aimerais trouver une définition de ça. Je vais utiliser la projection. J'ai la projection ici, ce vecteur-là est la projection. Je vais appeler ce vecteur w . La relation que nous avons est que si je fais la somme, $u = \text{proj}_v(u) + w$. Donc je projette u sur v , j'additionne le w et ça me donne le vecteur u . Le $S_v(u)$, c'est la même projection mais c'est l'inverse de ce w que je dois additionner. Donc c'est la projection - w . Et c'est ça qui va me permettre de trouver une formule pour la symétrie orthogonale.

Notes

Summary



11m 05s



Fixons $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application $S_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, la symétrie orthogonale par rapport à \vec{v} .

$$\vec{u} = \text{proj}_v u + \vec{w} \quad ; \quad \vec{w} = \vec{u} - \text{proj}_v u$$

$$S_v(u) = \text{proj}_v u - w \\ = \text{proj}_v u - (u - \text{proj}_v u) = 2\text{proj}_v u - u.$$

Vérifions que $S_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application \mathbb{R} -linéaire.

Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$S_v(\lambda u_1 + u_2) = 2\text{proj}_v(\lambda u_1 + u_2) - (\lambda u_1 + u_2) =$$

5.2 Exemples géométriques

Donc ici j'ai $w = u - S_v(u)$, donc je mets ça dans la formule, j'ai $S_v(u) - (u - S_v(u))$. Du coup j'ai une formule pour la symétrie et c'est $2S_v(u) - u$.

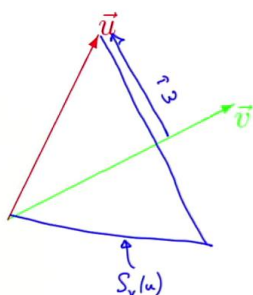
Voilà la formule. C'est une application qui prend un u dans \mathbb{R}^2 , elle fait la projection, qui était une application linéaire, on multiplie par deux et ensuite on soustrait le u . On peut vérifier que cette application est linéaire. Vérifions que $S_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application \mathbb{R} -linéaire. Je prends deux vecteurs dans \mathbb{R}^2 , disons u_1, u_2 dans \mathbb{R}^2 et un scalaire, λ réel. J'applique la symétrie à la combinaison linéaire $\lambda u_1 + u_2$. Donc par la formule que nous avons trouvée, c'est $2 \cdot \text{proj}_v(\lambda u_1 + u_2) - (\lambda u_1 + u_2)$. La projection est linéaire donc je peux décomposer. Comme c'est une application \mathbb{R} -linéaire c'est $2\lambda \cdot \text{proj}_v(u_1) + 2 \cdot \text{proj}_v(u_2) - \lambda u_1 - u_2$. Donc ceci, c'est : $\lambda(2 \cdot \text{proj}_v(u_1) - u_1) + 2 \cdot \text{proj}_v(u_2) - u_2$. Et ça c'est égal à...

Notes

Summary



12m 58s



Fixons $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application
 $S_v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, la symétrie orthogonale par rapport à \vec{v} .

$$\vec{u} = \text{proj}_v u + \vec{w} \quad ; \quad \vec{w} = \vec{u} - \text{proj}_v u$$

$$\begin{aligned} S_v(u) &= \text{proj}_v u - w \\ &= \text{proj}_v u - (u - \text{proj}_v u) = 2\text{proj}_v u - u. \end{aligned}$$

Vérifions que $S_v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application \mathbb{R} -linéaire.

Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} S_v(\lambda u_1 + u_2) &= 2\text{proj}_v(\lambda u_1 + u_2) - (\lambda u_1 + u_2) = \lambda \cdot 2\text{proj}_v(u_1) + 2\text{proj}_v(u_2) - \lambda u_1 - u_2 \\ &= \lambda(2\text{proj}_v(u_1) - u_1) + 2\text{proj}_v(u_2) - u_2 \\ &= \lambda S_v(u_1) + S_v(u_2). \end{aligned}$$

Donc S_v est une application \mathbb{R} -linéaire.

5.2 Exemples géométriques



On a exactement notre formule pour la symétrie appliquée à u_1 et ça c'est la symétrie appliquée à u_2 . Ce qu'il faut montrer pour voir que S_v est linéaire, c'est que ou bien on fait la combinaison linéaire à l'intérieur ou bien on applique l'application et on fait la combinaison linéaire ensuite, et cela donne le même résultat. Cela démontre que la symétrie est une application \mathbb{R} -linéaire. Je vais donner des exemples concrets.

Notes

Summary

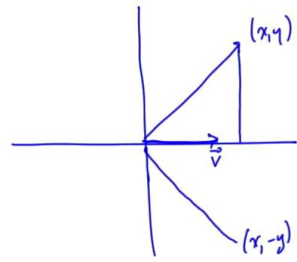


14m 57s

Exemple Snt $\vec{v} = (1, 0)$

$$\text{proj}_{\vec{v}}(x, y) = (x, 0)$$

$$2\text{proj}_{\vec{v}}(x, y) - (x, y) = 2(x, 0) - (x, y) = (x, -y)$$



5.2 Exemples géométriques



Exemple, de nouveau de nos projections et de la symétrie. Prenons pour le vecteur v , le vecteur $(1, 0)$, on voit vraiment bien géométriquement ce qui se passe. Je fixe les axes. Ce vecteur-là est v . Si je fais la projection du vecteur (x, y) , ça va donner exactement la coordonnée $(x, 0)$. Donc je projette sur l'axe des x . Si je fais deux fois la projection moins le vecteur, j'ai $2(x, 0) - (x, y) = (x, -y)$ et c'est exactement ce qu'on veut. Donc ici j'illustre. Si j'ai un vecteur là (x, y) , je projette, je trouve le vecteur $(x, 0)$, je fais la symétrie de l'autre côté, donc je passe de l'autre côté et ça c'est le vecteur $(x, -y)$. Enfin, dans les exercices, vous verrez un autre exemple qui est très important, les rotations. C'est plus difficile, c'est un peu compliqué de voir la rotation dans l'espace autour de l'origine, c'est une application linéaire mais c'est aussi très important donc du coup, vous voyez que les applications linéaires sont vraiment très naturelles. On a des applications : la projection, la symétrie et les rotations qui sont naturellement des applications linéaires.

Notes

Summary



15m 38s