



5.3 Exemples: espaces de fonctions



Dans la vidéo précédente, nous avons vu des exemples géométriques d'applications linéaires. Dans cette vidéo, nous allons voir des exemples d'applications linéaires qui partent d'un espace de fonction pour arriver dans un autre espace vectoriel. Ce sont des applications linéaires très utiles dans les cours d'analyse ou les équations différentielles.

Notes

Summary



0m 04s

- (1) Soient $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$ et $T : V \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
 $T(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

Vérifions que T est une application \mathbb{R} -linéaire.

Soient $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ et
 $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ des polynômes.

Supposons $m \leq n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
 $T(\lambda p + q) = T(\lambda a_0 + b_0 + (\lambda a_1 + b_1)x + \dots + (\lambda a_m + b_m)x^m + \dots)$

- (2) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $T : V \rightarrow V$
 $(T(f))(x) = f(x+1)$



5.3 Exemples: espaces de fonctions

Je commence avec deux exemples. Je me donne V , l'espace des polynômes à coefficients réels, donc à durée illimitée donc tous les polynômes. Puis je définis une application de V vers l'espace des polynômes de degré au plus 2. C'est l'application qui va opérer une sorte de tronquation, cela ne va me donner que les trois premiers termes du polynôme, donc jusqu'au terme x^2 . Maintenant je vais démontrer que c'est bien une application linéaire, ainsi vous pratiquerez la vérification que c'est bien une application linéaire. Vérifions... alors, je dois prendre deux polynômes. Soit $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ et $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ etc. $b_m x^m$... deux éléments de V , des polynômes. Ici on peut supposer que m est plus petit ou égal à n . Puis je prends un scalaire. Maintenant, je dois faire T appliquée à $\lambda p + q$. C'est appliqué au polynôme donc maintenant je fais la combinaison linéaire des deux et j'aurai $\lambda a_0 + b_0 + \lambda a_1 + b_1x + \dots + \lambda a_m + b_mx^m$, etc. m est plus petit donc j'arrête ici avec les b , donc j'ai $\lambda a_m + b_m x^m$, etc. Ce n'est pas si important parce qu'ici nous n'aurons que les trois premiers termes.

Notes

Summary



- (1) Soient $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$ et $T : V \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
 $T(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

Vérifions que T est une application \mathbb{R} -linéaire.

Soient $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ et
 $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ des polynômes.

Supposons $m \leq n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(\lambda p + q) &= T(\lambda a_0 + b_0 + (\lambda a_1 + b_1)x + \dots + (\lambda a_m + b_m)x^m + \lambda a_{m+1}x^{m+1} + \dots) \\ &= \lambda a_0 + b_0 + (\lambda a_1 + b_1)x + (\lambda a_2 + b_2)x^2 \\ &= \lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) = \lambda T(p) + T(q). \end{aligned}$$

- (2) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $T : V \rightarrow V$
 $(T(f))(x) = f(x+1)$

Donc T est \mathbb{R} -linéaire.

5.3 Exemples: espaces de fonctions



Ensuite j'ai $\lambda a_m + b_m + 1$, etc. Qu'est-ce que T fait ? T tronque et ne me donne que les trois premiers termes donc j'ai $\lambda a_0 + b_0 + \lambda a_1 + b_1$ qui multiplie x + $\lambda a_2 + b_2$ qui multiplie x^2 . Maintenant je peux tout remanier ici, ça c'est la même chose que λ , qui multiplie $a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2$. Ici, c'est exactement la définition de $\lambda x \dots$ bon ça c'est T de p et ça, c'est T de q . Donc ici je commence avec un p et q quelconque et un λ , un scalaire puis je montre que T de $\lambda p + q$ c'est la même chose que λT de $p + q$, donc T est \mathbb{R} linéaire. Nous avons fait plusieurs vérifications. J'aimerais faire une remarque. Vous aurez sûrement remarqué que cela ressemble beaucoup à ce que l'on fait quand on vérifie qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel parce qu'il y a cette notion de linéarité, de faire les combinaisons linéaires. Mais ici, la différence c'est qu'il y a une seule condition à vérifier, c'est cette linéarité-là. Il n'y a pas cette notion de vérifier que l'ensemble est non-vide ou quelque chose avec le zéro. Il n'y a que cette condition.

Notes

Summary



- (1) Soient $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$ et $T : V \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
 $T(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

Donc T est \mathbb{R} -linéaire.

Vérifions que T est une application \mathbb{R} -linéaire.

Soient $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ et
 $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ des polynômes.

Supposons $m \leq n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(\lambda p + q) &= T(\lambda a_0 + b_0 + (\lambda a_1 + b_1)x + \dots + (\lambda a_m + b_m)x^m + \lambda a_{m+1}x^{m+1} + \dots) \\ &= \lambda a_0 + b_0 + (\lambda a_1 + b_1)x + (\lambda a_2 + b_2)x^2 \\ &= \lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) = \lambda T(p) + T(q). \end{aligned}$$

- (2) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $T : V \rightarrow V$
 $(T(f))(x) = f(x+1)$.

Soient $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (T(\lambda f + g))(x) &= (\lambda f + g)(x+1) \\ &= \lambda f(x+1) + g(x+1) \\ &= (\lambda T(f))(x) + (T(g))(x) \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Donc } T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g).$$

5.3 Exemples: espaces de fonctions



C'est vrai que ça y ressemble et c'est parce que nous travaillons les espaces, où la linéarité joue un grand rôle. Je vais donner un deuxième exemple. Ici je définis une application qui part de l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et qui arrive dans le même espace. Ce que cela va faire c'est que cela va prendre une fonction et faire une sorte de translation de la fonction, donc cela déplace f vers la gauche, le graphe de f vers la gauche donc ici je vérifie que ceci est une application linéaire. Soit f et g , des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et λ , un scalaire. Maintenant, je regarde T de $\lambda f + g$ C'est sensé être une fonction donc je l'applique à x et ici ça donne par la définition $\lambda f + g$ appliquée à $x + 1$ et quand on a la somme de deux fonctions appliquées à quelque chose, par définition c'est ça, et ça c'est exactement λ T de f appliquée à $x + T$ de g appliquée à x et comme c'est vrai pour tout x , c'est une égalité de fonctions donc T de $\lambda f + g = \lambda T$ de $f + T$ de g . Et c'est ce qu'il faut vérifier pour voir que l'on a bien une application linéaire. Ce sont deux applications sur les fonctions qui sont très naturelles et j'en rajoute trois autres.

Notes

Summary



3m 56s

(3) Soit $V = C^1(\mathbb{R})$, fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. la dérivée f' est une fonction définie sur \mathbb{R} .

$W = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, toutes les fonctions sur \mathbb{R} .

On définit $D: V \rightarrow W$, $D(f) = f'$. D est linéaire.

(4)



5.3 Exemples: espaces de fonctions



Troisième exemple. Je pose $V \subset C^1$ de \mathbb{R} et ce sont les fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que la dérivée f' est une fonction définie sur \mathbb{R} . Puis je prends W , l'ensemble des fonctions sur \mathbb{R} . Ensuite je définis une application D qui part de V et qui arrive dans W . Je l'appelle D pour une raison. Ce D va prendre f et il va donner la dérivée. Donc tout est fait pour que cela soit bien défini donc on part d'une fonction dont la dérivée existe et est définie partout sur \mathbb{R} puis je l'envoie à une fonction sur \mathbb{R} . Ce sont deux espaces vectoriels, d'ailleurs V ici est un sous-espace de W . On pourrait additionner les fonctions, on sait comment faire pour multiplier par un scalaire. Je n'ai pas vraiment besoin de vous montrer que c'est une application linéaire parce qu'on sait que quand on prend la dérivée, c'est quelque chose de linéaire. Si on fait la dérivée d'une somme de fonctions, c'est la somme des dérivées et si on fait la dérivée d'un scalaire qui multiplie une fonction alors c'est le scalaire qui multiplie la dérivée. Donc c'est linéaire. Donc D est linéaire. Quatrième exemple. Je prends l'intervalle dans \mathbb{R} .

Notes

Summary



5m 49s

(3) Soit $V = C^1(\mathbb{R})$, fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. la dérivée f' est une fonction définie sur \mathbb{R} .

$W = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, toutes les fonctions sur \mathbb{R} .

On définit $D: V \rightarrow W$, $D(f) = f'$. D est linéaire.

(4) Soit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

On définit $I: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application des fonctions continues sur \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

$I(f) = \int_a^b f(x) dx$. I est une application \mathbb{R} -linéaire.

(5) Fixons $\gamma \in \mathbb{R}$. On définit $e_\gamma: P(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit

$$e_\gamma(p) = a.$$

$$\text{où } p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

5.3 Exemples: espaces de fonctions



Soit a plus petit que b des nombres réels puis je définis I qui va prendre une fonction continue donc C de \mathbb{R} et qui va donner l'application des fonctions continues sur \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Cela prend une fonction continue et cela donne une valeur réelle. On définit cela. I de une fonction est l'intégrale de a à b de la fonction. Donc l'intégrale définie de a à b de la fonction f . De nouveau, je n'ai pas vraiment besoin de vérifier que c'est une application linéaire, parce que vous savez que l'intégrale de $f + g$ est la même que la somme des deux intégrales. Si je mets un scalaire à l'intérieur ici, je peux sortir le scalaire. Donc c'est bien une application linéaire. Donc I est une application \mathbb{R} linéaire. Enfin, un dernier exemple avec les espaces de fonctions. Maintenant je fixe un nombre réel et je définis une application des polynômes dans \mathbb{R} que j'appelle e gamma, qui part des polynômes, et qui arrive dans \mathbb{R} . e gamma appliquée à p va être... donc je me donne le p ici : p de $x = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$. Ce que ce e gamma va faire c'est qu'il va évaluer p en tant que fonction polynoméenne en gamma. Cela donne $a_0 + a_1 \gamma + \dots + a_n \gamma^n$.

Notes

Summary



7m 27s

(3) Soit $V = C^1(\mathbb{R})$, fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. la dérivée f' est une fonction définie sur \mathbb{R} .

$W = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, toutes les fonctions sur \mathbb{R} .

On définit $D: V \rightarrow W$, $D(f) = f'$. D est linéaire.

(4) Soit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

On définit $I: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application des fonctions continues sur \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

$I(f) = \int_a^b f(x) dx$. I est une application \mathbb{R} -linéaire.

(5) Fixons $\gamma \in \mathbb{R}$. On définit $e_\gamma: P(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit

$e_\gamma(p) = a_0 + a_1\gamma + \dots + a_n\gamma^n$. ("évaluation en γ "). e_γ est une application \mathbb{R} -linéaire.

où $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

5.3 Exemples: espaces de fonctions



Je l'appelle l'évaluation en gamma et c'est aussi linéaire. Donc e gamma est une application linéaire. Le but de cette vidéo était de vous donner des exemples d'applications linéaires qui partent d'un espace de fonctions et qui arrivent dans un autre espace vectoriel et qui sont des applications que vous connaissez déjà et qui sont effectivement des applications linéaires.

Notes

Summary



9m 27s