



5.4 D'autres exemples, généralités



Nous continuons à étudier les applications linéaires d'espaces vectoriels, et puis dans cette vidéo, nous verrons des exemples supplémentaires, et aussi des exemples généraux, qui vont avec n'importe quel espace vectoriel.

Notes

Summary



0m 04s

- (1) Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel avec base (v_1, \dots, v_n) . Soient W un \mathbb{R} -espace vectoriel et $w_1, \dots, w_n \in W$. On définit $T : V \rightarrow W$ par $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$. Alors T est une application linéaire.

5.4 D'autres exemples, généralités



Voilà le premier exemple. Je me donne un R -espace vectoriel, et je fixe une base, donc c'est un R -espace vectoriel de dimension finie avec base v_1, \dots, v_n , et puis je me donne un autre R -espace vectoriel, et juste n vecteurs quelconques, donc ça, c'est vraiment des vecteurs quelconques, dans W . Et puis je définis une application qui part de V et qui arrive dans W , à cette combinaison linéaire des w_i . Alors T est une application linéaire. En fait, on a défini T comme suit : La remarque que je vais faire ici. C'est qu'on a défini T de la façon suivante : T envoie v_i à w_i , et puis, dès qu'on a dit où on envoie une base, on sait que ça définit une application linéaire entièrement. Et donc après, on dit qu'on étend T par linéarité. C'est ça la notion, on fixe $T(v_i)$, qui est égal à w_i , et puis après, cela entraîne les valeurs de tous les autres vecteurs. Maintenant, pour voir que c'est linéaire, je laisse cela comme exercice. Donc la preuve de linéarité, je la laisse comme exercice.

Notes

Summary



0m 18s

- (2) Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel avec base (v_1, \dots, v_n) . On définit $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $T(\alpha v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Alors T est une application linéaire bijective.

Une application linéaire bijective entre deux \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W est aussi appelée un **isomorphisme** entre V et W .

Bijektivité.
(On admet que T est une application linéaire)



5.4 D'autres exemples, généralités

Ce n'est pas difficile. Deuxième généralité : Maintenant, je me donne un R -espace vectoriel, de nouveau avec base v_1, \dots, v_n , et puis je définis une application de V dans R^n . Et je vais envoyer la combinaison linéaire $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, au vecteur dans R^n qui est le vecteur $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, donc je prends ces coefficients et je les mets comme coordonnées. Alors, cette fois-ci, T est une application linéaire, et c'est une application linéaire bijective. Je vais me convaincre de la bijectivité, on va admettre que c'est une application linéaire, de nouveau, je vous laisse ça en exercice. Et puis, avant de montrer la bijectivité, je vais juste vous donner une notation, ou bien une définition, ici, une application linéaire bijective entre R -espace vectoriel V et W est aussi appelée un isomorphisme entre V et W , donc bijective, ça veut dire isomorphisme, et vice versa. Alors, je veux montrer la bijectivité, donc bijectivité : Je vais admettre que T est linéaire. Vous pouvez faire ça en exercice.

Notes

Summary



1m 35s

- (2) Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel avec base (v_1, \dots, v_n) . On définit $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $T(\alpha v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Alors T est une application linéaire bijective.

Une application linéaire bijective entre deux \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W est aussi appelée un **isomorphisme** entre V et W .

Bijektivité.

(On admet que T est une application linéaire.)

Injectivité. Soient $w, v \in V$ t.g.

$$T(w) = T(v).$$

$$w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

$$T(w) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

$$T(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

$$T(w) = T(v) \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \text{ pour tout } i \Rightarrow w = v.$$

Donc T est injective.

5.4 D'autres exemples, généralités



Pour la bijectivité, je dois montrer que T est injective et surjective. Donc d'abord je montre l'injectivité. Prenons w et v dans V tels que $T(w) = T(v)$. Et puis, je dois voir que $w = v$. Donc w , je peux l'écrire comme une combinaison linéaire des v_i , donc $w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$. Et v , je peux l'écrire comme une combinaison linéaire des v_i , c'est-à-dire $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Et $T(w)$ est le vecteur $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Et $T(v)$ est le vecteur $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Donc, si $T(w) = T(v)$, ça implique que $\alpha_i = \beta_i$ pour tout i , et cela implique que $w = v$. Donc T est injective. La surjectivité est très facile, car je me donne un vecteur dans \mathbb{R}^n , disons $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, un vecteur quelconque dans \mathbb{R}^n , alors il est très facile de voir quel vecteur lui est envoyé dessus, si je prends $\gamma_1 v_1 + \dots$

Notes

Summary



- (2) Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel avec base (v_1, \dots, v_n) . On définit $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $T(\alpha v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Alors T est une application linéaire bijective.

Une application linéaire bijective entre deux \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W est aussi appelée un **isomorphisme** entre V et W .

Surjectivité: Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$.
Alors $T(\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Bijektivité.

(On admet que T est une application linéaire.)

Injectivité: Soient $u, v \in V$ t.g.

$$T(u) = T(v).$$

$$u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

$$T(u) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

$$T(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

$$T(u) = T(v) \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \text{ pour tout } i \Rightarrow u = v.$$

Donc T est injective.

5.4 D'autres exemples, généralités



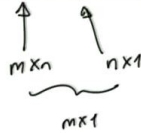
+ $\gamma_n v_n$, T de ce vecteur est égal à $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Ça, c'est très bien, d'ailleurs je pense que vous avez déjà réfléchi dans ce sens-là, si on a un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , ça ressemble énormément à \mathbb{R}^n dans beaucoup de propriétés. Donc cela fait une application linéaire bijective, nous n'avons pas montré que c'est une application linéaire, ça, je vous laisse en exercice, mais là, j'ai montré l'injectivité et la surjectivité. On appelle ça un isomorphisme. Passons au prochain exemple.

Notes

Summary



- (3) Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n avec base \mathcal{B}_V et W un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension m avec base \mathcal{B}_W . Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$. On définit une application linéaire $T_A : V \rightarrow W$, $[T_A(v)]_{\mathcal{B}_W} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}_V}$.



5.4 D'autres exemples, généralités



C'est un exemple très important aussi. Je me donne de nouveau un R -espace vectoriel de dimension n , avec une base que je fixe, et un autre R -espace vectoriel, mais cette fois de dimension m , éventuellement différents. Et là, je me donne une matrice $m \times n$, qui a pour coefficients les coefficients a_{ij} , et je définis une application comme suit : je dis que cette application qui est associée à cette matrice A va prendre un vecteur v et l'envoyer à droite, et quand j'écris son image par rapport à la base W , alors c'est juste la multiplication de la matrice A avec le vecteur v , écrit en terme de la base de V . Maintenant, tout ça, déjà, il faut voir que c'est une bonne définition, ici, donc tout est bien défini, parce que le A , ici, est une matrice $m \times n$, le v est un vecteur colonne, donc v est de dimension n , donc ça c'est de taille $n \times 1$. Donc ça, c'est un vecteur ou une matrice, qui est de taille $m \times 1$, donc ça définit bien un vecteur qui est dans W , et je dis que ça donne les coordonnées de ce vecteur-là. Donc c'est une bonne définition.

Notes

Summary



- (3) Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n avec base \mathcal{B}_V et W un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension m avec base \mathcal{B}_W . Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$. On définit une application linéaire $T_A : V \rightarrow W$, $[T_A(v)]_{\mathcal{B}_W} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}_V}$.

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ m \times n & & n \times 1 \\ \hline & & m \times 1 \end{array}$$

Linéarité

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad v_1, v_2 \in V.$$

$$\begin{aligned} [T_A(\alpha v_1 + v_2)]_{\mathcal{B}_W} &= A \cdot [\alpha v_1 + v_2]_{\mathcal{B}_V} \\ &= A(\alpha [v_1]_{\mathcal{B}_V} + [v_2]_{\mathcal{B}_V}) \end{aligned}$$

5.4 D'autres exemples, généralités

Et maintenant, je vais juste vous montrer que c'est une application linéaire. Comme je n'ai pas montré dans les deux exemples précédents, ici, je veux le montrer. Linéarité : Alors, je me donne un nombre α dans \mathbb{R} et deux vecteurs v_1 et v_2 dans V . Alors T_A appliquée à $\alpha v_1 + v_2$. Bon, ça, c'est un vecteur à droite, donc je peux l'exprimer en terme de la base \mathcal{B}_W . Et puis, par la définition, c'est égal à A , la matrice, fois le vecteur $\alpha v_1 + v_2$, qui est exprimé en termes de la base \mathcal{B}_V . Maintenant, ça, c'est la multiplication de matrice, on a déjà remarqué ici que les coordonnées de ce vecteur-là sont les mêmes que si je prends α fois les coordonnées de v_1 plus le vecteur colonne qui représente v_2 . Donc ça, c'était cette propriété que j'avais soulignée avant, qui est très importante. Maintenant, c'est la multiplication de matrices, donc j'utilise les propriétés de la multiplication de matrices, donc ça c'est αA fois la matrice qui est le vecteur colonne v_1 par rapport à \mathcal{B}_V , plus A fois le vecteur colonne associé à v_2 par rapport à \mathcal{B}_V .

Notes

Summary



- (3) Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n avec base \mathcal{B}_V et W un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension m avec base \mathcal{B}_W . Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$. On définit une application linéaire $T_A : V \rightarrow W$, $[T_A(v)]_{\mathcal{B}_W} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}_V}$.

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \\ m \times n & n \times 1 & \\ \underbrace{}_{m \times 1} & & \end{array}$$

Linéarité

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad v_1, v_2 \in V.$$

$$\begin{aligned} [T_A(\alpha v_1 + v_2)]_{\mathcal{B}_W} &= A \cdot [\alpha v_1 + v_2]_{\mathcal{B}_V} \\ &= A(\alpha [v_1]_{\mathcal{B}_V} + [v_2]_{\mathcal{B}_V}) \\ &= \alpha A[v_1]_{\mathcal{B}_V} + A[v_2]_{\mathcal{B}_V} \\ &= \alpha [T_A(v_1)]_{\mathcal{B}_W} + [T_A(v_2)]_{\mathcal{B}_W}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_A(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T_A(v_1) + T_A(v_2).$$

Donc T_A est \mathbb{R} -linéaire.

5.4 D'autres exemples, généralités



Et puis ceci est α fois... donc ça, c'est exactement le vecteur colonne qui représente $T_A(v_1)$ par rapport à \mathcal{B}_W , et puis ça, c'est aussi ce qui représente $T_A(v_2)$ par rapport à \mathcal{B}_W . Donc maintenant, ça veut dire qu'ici, ce vecteur-là, il est représenté par ça, et donc cela implique que $T_A(\alpha v_1 + v_2)$ est égal à $\alpha T_A(v_1) + T_A(v_2)$. Donc T_A est une application \mathbb{R} -linéaire. Maintenant, j'aimerais appliquer cela dans un exemple concret.

Notes

Summary



Exemple. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_V = (e_1, e_2, e_3)$, $W = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}_W = (1, x, x^2, x^3)$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R}).$$

$$T_A((a, b, c)) = ?$$

$$[T_A((a, b, c))]_{\mathcal{B}_W} = A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



5.4 D'autres exemples, généralités



Je prends V , le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 , je fixe la base canonique (e_1, e_2, e_3) . Je prends W , l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3, et je fixe ma base préférée $(1, x, x^2, x^3)$. Et puis, après, je pose la matrice A , comme ici, une matrice 4×3 . Donc l'application que je viens de définir, comme dans l'exemple précédent, numéro 3, est définie comme suit : Je fais T_A appliquée à un vecteur quelconque, donc appliquée au vecteur (a, b, c) dans \mathbb{R}^3 . Et ça, c'est égal à quoi ? La définition est comme suit : Je prends T_A appliquée à (a, b, c) , représentée par rapport à cette deuxième base, c'est la même chose que si je multiplie cette matrice fois la représentation du vecteur (a, b, c) par rapport à la base canonique qui est juste $(a, b, c)^T$. Donc je fais la multiplication et j'obtiens le vecteur colonne $(a - b, b, a + 2c, 0)^T$.

Notes

Summary



Exemple. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_V = (e_1, e_2, e_3)$, $W = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}_W = (1, x, x^2, x^3)$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R}).$$

$$T_A((a, b, c)) = ?$$

$$[T_A((a, b, c))]_{\mathcal{B}_W} = A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b \\ a+2c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } T_A((a, b, c)) = (a-b) \cdot 1 + b \cdot x + (a+2c)x^2 + 0 \cdot x^3$$

T_A , est-elle une application surjective? injective?

T_A n'est pas surjective : car $x^3 \notin \text{Im}(T_A)$

5.4 D'autres exemples, généralités



Donc ceci est censé représenter l'image de (a, b, c) par rapport à cette base-là, cela veut dire que T_A du vecteur (a, b, c) est égal à $(a-b) + bx + (a+2c)x^2 + 0x^3$. C'est exactement ce que dit cette règle, c'est que j'applique l'application T_A à ce vecteur-là, et ici, je donne ces coordonnées par rapport à cette base-là. Maintenant, dans cet exemple, ici, juste pour s'exercer un peu, on peut se poser quelques questions : Est-ce que ce T_A est surjective ? Est-ce qu'elle est injective ? Donc T_A est-elle une application surjective ? Injective ? Par exemple. Alors, surjective, il est très facile de voir que la réponse est non. Donc T_A n'est pas surjective. Et je vous laisse réfléchir juste une minute. Vous regardez ici l'image de (a, b, c) , et vous voyez que de toute façon, il n'y a pas le terme x^3 parce que le coefficient de x^3 , c'est zéro. Donc T_A n'est pas surjective car le polynôme x^3 n'appartient pas à l'image de T_A . Donc vous pouvez faire tout ce que vous voulez, mais vous ne trouverez jamais un vecteur dans \mathbb{R}^3 qui est envoyé à x^3 .

Notes

Summary



10m 38s

Exemple. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_V = (e_1, e_2, e_3)$, $W = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}_W = (1, x, x^2, x^3)$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R}).$$

$$T_A((a, b, c)) = ?$$

$$[T_A((a, b, c))]_{\mathcal{B}_W} = A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b \\ a+2c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } T_A((a, b, c)) = (a-b) \cdot 1 + b \cdot x + (a+2c)x^2 + 0 \cdot x^3$$

T_A , est-elle une application surjective? injective?

T_A n'est pas surjective : car $x^3 \notin \text{Im}(T_A)$

T_A est-elle injective? Supposons que $T_A((a, b, c)) = T_A((d, e, f)) = (d-e) + ex + (d+2f)x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b = d-e \\ b = e \\ a+2c = d+2f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ c = f \end{cases} \quad (a, b, c) = (d, e, f)$$

Donc T_A est injective.

5.4 D'autres exemples, généralités



Notes

Donc ce n'est pas surjectif. Et injective ? T_A est-elle injective ? Je suppose que j'ai deux vecteurs qui sont envoyés au même endroit. Donc supposons que $T_A(a, b, c)$ est égal à $T_A(d, e, f)$. Alors, comme j'ai les images ici, ça veut dire que $a-b$ est égal à $d-e$, et que la deuxième coordonnée, donc le coefficient de x , qui est b est égal à e , et que $a+2c$ est égal à $d+2f$. Donc j'imagine, là, j'ai écrit carrément, peut-être j'écris ici, comme ça vous voyez bien. Donc, ici, l'image de (d, e, f) c'est $(d-e) + ex + (d+2f)x^2$. Donc c'est pour ça que je dis que $d-e$ doit être égal à $a-b$, e doit être égal à b , et $d+2f$ doit être égal à $a+2c$. Donc ici, c'est un système d'équations mais c'est très facile à résoudre, donc je ne vais pas écrire une matrice, comme b est égal à e , ces deux équations impliquent que a est égal à d . Et comme a est égal à d , cela implique que c est égal à f . Donc, du coup, a est égal à d , b est égal à e , c est égal à f , donc (a, b, c) est égal à (d, e, f) . Donc ces deux vecteurs qui sont envoyés au même endroit sont en fait un seul vecteur, donc T_A est injective.

Summary



12m 18s

- (1) Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel avec base (v_1, \dots, v_n) . Soient W un \mathbb{R} -espace vectoriel et $w_1, \dots, w_n \in W$. On définit $T : V \rightarrow W$ par $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$. Alors T est une application linéaire.
- (2) Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel avec base (v_1, \dots, v_n) . On définit $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $T(\alpha v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Alors T est une application linéaire bijective.
- (3) Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n avec base \mathcal{B}_V et W un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension m avec base \mathcal{B}_W . Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$. On définit une application linéaire $T_A : V \rightarrow W$, $[T_A(v)]_{\mathcal{B}_W} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}_V}$.

5.4 D'autres exemples, généralités



Voilà, on a vu des exemples d'applications linéaires qu'on peut faire avec n'importe quel espace vectoriel. Donc, premier exemple important, c'est qu'on a une base (v_1, \dots, v_n) , on peut l'envoyer où on veut, dans le deuxième espace, ça fait une application linéaire. Sinon, si on a une base (v_1, \dots, v_n) , on a un isomorphisme, une application linéaire bijective entre V et \mathbb{R}^n . Et puis enfin, si on a un espace vectoriel V et un espace vectoriel W , les deux de dimension finie, on peut poser une matrice de la bonne taille, et définir en fonction de cette matrice une application linéaire de V dans W .

Notes

Summary



14m 11s