



5.5 Le noyau d'une application linéaire

Ayant donné la définition d'une application linéaire et ayant vu quelques exemples, passons aux objets qui sont liés, à deux sous-espaces, qui sont liés à une application linéaire quelconque. Le premier sous-espace que nous allons voir est le noyau d'une application linéaire.

Notes

Summary



0m 03s

Définition Soit $T: V \rightarrow W$ une application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W .

On pose $\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$, le noyau de T

5.5 Le noyau d'une application linéaire



Je commence par en donner la définition comme d'habitude. Je vais écrire la définition parce que j'aimerais en illustrer le déroulement lentement. Définition : je me donne une application linéaire: soit $T: V \rightarrow W$, une application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W . On pose que $\ker(T)$ est l'ensemble des vecteurs $v \in V$ tels que $T(v) = 0$, le vecteur nul dans W . Cela s'appelle le noyau de T . On peut se demander pourquoi on retrouve \ker . En fait, \ker vient de l'allemand "Kernel", l'algèbre ayant d'abord été étudiée en Allemagne, donc beaucoup de la notation et de la terminologie provient de l'allemand. Je vais donner deux exemples, puis j'illustrerai une propriété importante.

Notes

Summary



0m 20s

Définition. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire de \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W . On pose $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = \mathbf{0}_W\}$, le **noyau** de T .

Exemples.

(1) $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$

(2) $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $(D(f))(x) = f'(x)$

(1) π la projection orthogonale sur le plan xy .

$$\begin{aligned}\ker(\pi) &= \{(x, y, z) \mid \pi(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, 0) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$



5.5 Le noyau d'une application linéaire

Je redonne la définition : une application linéaire, $\ker(T)$ donc le noyau de T est formé de tous les vecteurs dans le premier espace qui sont envoyés sur le vecteur nul dans le deuxième espace. Je vais donner deux exemples. Premier exemple : j'ai l'application qui envoie \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 et c'est une projection orthogonale, donc ici π , c'est la projection orthogonale sur le plan xy . Alors quel est le noyau de π ? Par définition, tous les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que la projection de ce vecteur est égale à zéro : $\pi(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Je répète : ce sont tous les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x, y, 0) = (0, 0, 0)$. Pour que x et y soient égaux à zéro, ce sont tous les vecteurs de la forme $(0, 0, z)$, où $z \in \mathbb{R}$. Maintenant si vous imaginez dans \mathbb{R}^3 , vous voulez que cela se projette ici sur 0 il faut que cela soit sur l'axe de z ici donc c'est tout l'axe de z qui est projeté sur le point zéro. Donc ceci est le noyau. Deuxième exemple : ici, nous avons l'application linéaire des fonctions dont la première dérivée existe et est définie partout, envoyée dans les fonctions sur \mathbb{R} .

Notes

Summary



Proposition. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire de \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W . Alors

(1) $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de V .

(2) L'application T est injective si et seulement si $\ker(T) = \{0_V\}$.

Exemples.

(1) $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \pi(x, y, z) = (x, y, 0)$

(2) $D : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}), (D(f))(x) = f'(x)$

(1) π La projection orthogonale sur le plan xy .

$$\begin{aligned} \ker(\pi) &= \{ (x, y, z) \mid \pi(x, y, z) = (0, 0, 0) \} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, 0) = (0, 0, 0) \} \\ &= \{ (0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$



(2) $\ker(D) = \{ f \in C^1(\mathbb{R}) \mid D(f) = 0 \}$
 $= \{ f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f'(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \}$
 $= \{ f(x) = c \mid c \in \mathbb{R} \}$
 fonctions constantes

5.5 Le noyau d'une application linéaire



Pour la dérivée, nous avons déjà dit, dans un des paragraphes précédents, qu'il s'agit d'une application linéaire. Ensuite, quel est son noyau ? Donc le noyau de D serait toutes les fonctions dont la dérivée est égale à zéro, donc toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R})$ telles que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et je crois que vous savez que cela signifie que $f(x) = c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$, donc ce sont des fonctions constantes. Maintenant, nous allons démontrer deux choses. Nous allons montrer que le noyau est un sous-espace vectoriel, et ensuite nous montrerons que nous pouvons l'utiliser pour déterminer si l'application est injective ou non.

Notes

Summary



2m 57s

Proposition. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire de \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W . Alors

- (1) $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de V .
- (2) L'application T est injective si et seulement si $\ker(T) = \{0_V\}$.

Preuve (1) $\ker(T)$ est non-vide, car

$$T(0_V) = 0_W \text{ donc } 0_V \in \ker(T).$$

Soient $u, v \in \ker(T)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a que } T(u) = 0_W \text{ et } T(v) = 0_W.$$

$$T(\alpha u + v)$$



5.5 Le noyau d'une application linéaire



Notes

C'est très utile et ensuite je donnerai un exemple qui illustrera à quel point c'est utile. Donc, je me donne une application linéaire entre \mathbb{R} -espaces vectoriels. Le noyau est toujours un sous-espace et l'application est injective si et seulement si ce noyau est seulement le vecteur nul. Je vais d'abord faire la preuve du (1). Preuve pour le (1): Je dois d'abord montrer que le noyau de T est non-vide. Donc ici vous devriez réfléchir une minute pour voir pourquoi, donc quel est le vecteur dont je suis sûre qu'il est toujours dans le noyau ? C'est le vecteur nul car nous avons vu que le fait que T soit une application linéaire implique qu'elle envoie le vecteur nul de V sur le vecteur nul de W et donc ce vecteur nul de V appartient au noyau. Donc il est non-vide. Maintenant je me donne deux vecteurs ici et un scalaire. Soit $u, v \in \ker(T)$ et α , un nombre réel. Comme u et v sont dans le noyau, je sais que que $T(u)$ est égal au vecteur nul ainsi que $T(v)$. Maintenant, je dois considérer $T(\alpha u + v)$. Comme T est linéaire, ceci est égal à $\alpha T(u) + T(v)$.

Summary



3m 51s

Proposition. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire de \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W . Alors

(1) $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de V .

(2) L'application T est injective si et seulement si $\ker(T) = \{0_V\}$.

Preuve (1) $\ker(T)$ est non-vide, car

$$T(0_V) = 0_W \text{ dnc } 0_V \in \ker(T).$$

Soient $u, v \in \ker(T)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a que $T(u) = 0_W$ et $T(v) = 0_W$.

$$T(\alpha u + v) \underset{T \text{ linéaire}}{=} \alpha T(u) + T(v) = \alpha \cdot 0_W + 0_W = 0_W.$$

Dnc $\alpha u + v \in \ker(T)$. Dnc $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de V .

(2) Supposons que T est injective.

Soit $v \in \ker(T)$.

$$T(v) = 0_W = T(0_V)$$

Par l'injectivité, $v = 0_V$. Dnc $\ker(T) = \{0_V\}$.

Supposons que $\ker(T) = \{0_V\}$.

5.5 Le noyau d'une application linéaire

Ici c'est $\alpha \cdot 0_W + 0_W$ donc, c'est le vecteur nul 0_W . Effectivement, $\alpha u + v$ appartient aussi au noyau de T et cela suffit pour montrer que le noyau est un sous-espace. Pour le deuxième point, c'est celui qui nous intéresse particulièrement car c'est un critère très calculatoire pour déterminer si une application est injective ou non. Je commence par supposer que T est injective. Supposons que T est injective. Soit v dans le noyau de T . Nous savons déjà que 0 est dans le noyau, donc nous avons $T(v) = 0 = T(0_V)$. Par l'injectivité, comme T envoie ces deux vecteurs au même endroit, nous obtenons que $v = 0_V$. J'ai pris un vecteur quelconque dans le noyau et en fait il est égal au vecteur nul dans V donc, le noyau n'a que ceci dedans, $\ker(T) = \{0_V\}$. C'est la direction facile. Maintenant prenons l'autre direction. Je suppose que je sais que le noyau est trivial. Supposons : que le noyau de T est seulement le vecteur nul. Ça ne peut pas être plus petit que cela puisque c'est un sous-espace, donc c'est au moins le vecteur nul.

Notes

Summary



5m 28s

Proposition. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire de \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W . Alors

(1) $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de V .

(2) L'application T est injective si et seulement si $\ker(T) = \{0_V\}$.

Preuve (1) $\ker(T)$ est non-vide, car

$$T(0_V) = 0_W \text{ dnc } 0_V \in \ker(T).$$

Soient $u, v \in \ker(T)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a que } T(u) = 0_W \text{ et } T(v) = 0_W.$$

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v) = \alpha \cdot 0_W + 0_W = 0_W.$$

T linéaire

Dnc $\alpha u + v \in \ker(T)$. Dnc $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de V .

(2) Supposons que T est injective.

Soit $v \in \ker(T)$.

$$T(v) = 0_W = T(0_V)$$

Par l'injectivité, $v = 0_V$. Dnc $\ker(T) = \{0_V\}$.

Supposons que $\ker(T) = \{0_V\}$.

Soient $u, v \in V$, tels que $T(u) = T(v)$

$$\Rightarrow T(u) - T(v) = 0_W$$

$$\Rightarrow T(u) + T(-v) = 0_W$$

$$\Rightarrow T(u - v) = 0_W$$

$$\Rightarrow u - v \in \ker(T)$$

$$\Rightarrow u - v = 0_V$$

$$\Rightarrow u = v + 0_V = v.$$

Dnc T est injective. \square

5.5 Le noyau d'une application linéaire



Supposons qu'il n'y ait que cela. Maintenant, je prends deux vecteurs qui sont envoyés au même endroit. Soit $u, v \in V$ tels que $T(u) = T(v)$. Cela signifie que $T(u) - T(v) = 0_W$, le vecteur nul dans W . Cela signifie que $T(u) + T(-v) = 0_W$. C'est l'une des propriétés d'une application linéaire : le moins de l'image est T de l'inverse. Cela implique (j'utilise de nouveau la linéarité) que $T(u - v) = 0_W$, et cela implique que $u - v$ est dans le noyau de T par définition. Nous avons commencé avec l'hypothèse que le noyau est seulement le vecteur nul donc $u - v = 0_V$ et enfin $u = v + 0_V$ donc $u = v$. Bref je commence avec deux vecteurs qui sont envoyés au même endroit mais en fait il s'agit du même vecteur donc T est injective. C'est la fin de la preuve. C'est vraiment un critère très utile. Je donne tout de suite un exemple pour vous l'illustrer. La linéarité entraîne que l'injectivité est équivalente au fait que le noyau est égal à zéro.

Notes

Summary



Exemple. Déterminer si l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ donnée par $T(a, b, c, d) = (a + b) + (c + 2d)x + (2a - b + c - d)x^2 + (b - d)x^3$ est injective.

Quel est $\ker(T)$?

$$\ker(T) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid T(a, b, c, d) = 0\}$$

$$= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid (a+b) + (c+2d)x + (2a-b+c-d)x^2 + (b-d)x^3 = 0\}.$$

Cherchons $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ t.q.

$$\begin{aligned} a+b &= 0 \\ c+2d &= 0 \\ 2a-b+c-d &= 0 \\ b-d &= 0. \end{aligned}$$

5.5 Le noyau d'une application linéaire



Voici un exemple. J'ai une application linéaire qui envoie \mathbb{R}^4 aux polynômes de degré au plus 3. Ici je donne une définition, c'est un peu compliqué en termes des coordonnées ici, je donne des coefficients des différentes puissances de x . Maintenant j'aimerais déterminer si cette application est injective ou non. On admet que c'est une application linéaire. Pour déterminer si elle est injective, je vais utiliser le critère qui a été donné par la proposition, donc quel est le noyau ? Je vais faire un calcul pour trouver le noyau puis j'en déduirai si T est injective ou non. Le noyau de T est formé de tous les vecteurs $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $T(a, b, c, d) = 0$ le polynôme nul, donc tous les $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que le polynôme $(a + b) + (c + 2d)x + (2a - b + c - d)x^2 + (b - d)x^3 = 0$, le polynôme nul. Donc cela signifie que c'est tous les $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $a + b = 0$, $c + 2d = 0$, $2a - b + c - d = 0$ et $b - d = 0$. Donc ici j'ai juste un système homogène d'équations linéaires et je sais très bien résoudre un tel système donc rapidement je pose la matrice des coefficients.

Notes

Summary



8m 48s

Exemple. Déterminer si l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ donnée par $T(a, b, c, d) = (a + b) + (c + 2d)x + (2a - b + c - d)x^2 + (b - d)x^3$ est injective.

Quel est $\ker(T)$?

$$\ker(T) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid T(a, b, c, d) = 0\}$$

$$= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid (a+b) + (c+2d)x + (2a-b+c-d)x^2 + (b-d)x^3 = 0\}.$$

Cherchons $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ t.q.

$$\begin{aligned} a+b &= 0 \\ c+2d &= 0 \\ 2a-b+c-d &= 0 \\ b-d &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 4 \text{ pivots} \\ \text{aucune variable} \\ \text{libre.} \end{array}$$

Le système ne possède que la solution triviale $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$. Donc

$$\ker(T) = \{(0, 0, 0, 0)\} \Rightarrow T \text{ est injective.}$$



5.5 Le noyau d'une application linéaire

L'échelonnage est assez rapide donc je le fais [voir écran]. Ensuite je vais échanger des lignes ici, je vais mettre la dernière ligne entre la première et la deuxième. Ensuite ici je vais rajouter 3 fois ma nouvelle deuxième ligne à la dernière. Une dernière étape avant de terminer. Je rajoute -1 fois la troisième ligne à la dernière. Du coup, il y a quatre pivots et aucune variable libre, ce qui signifie qu'il n'y a que la solution triviale. Donc le système ne possède que la solution triviale. $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$. Donc, pour répondre à la question, le noyau de T n'est que le vecteur nul et donc T est injective. C'est ainsi que se pratique la proposition que nous avons vue précédemment.

Notes

Summary

