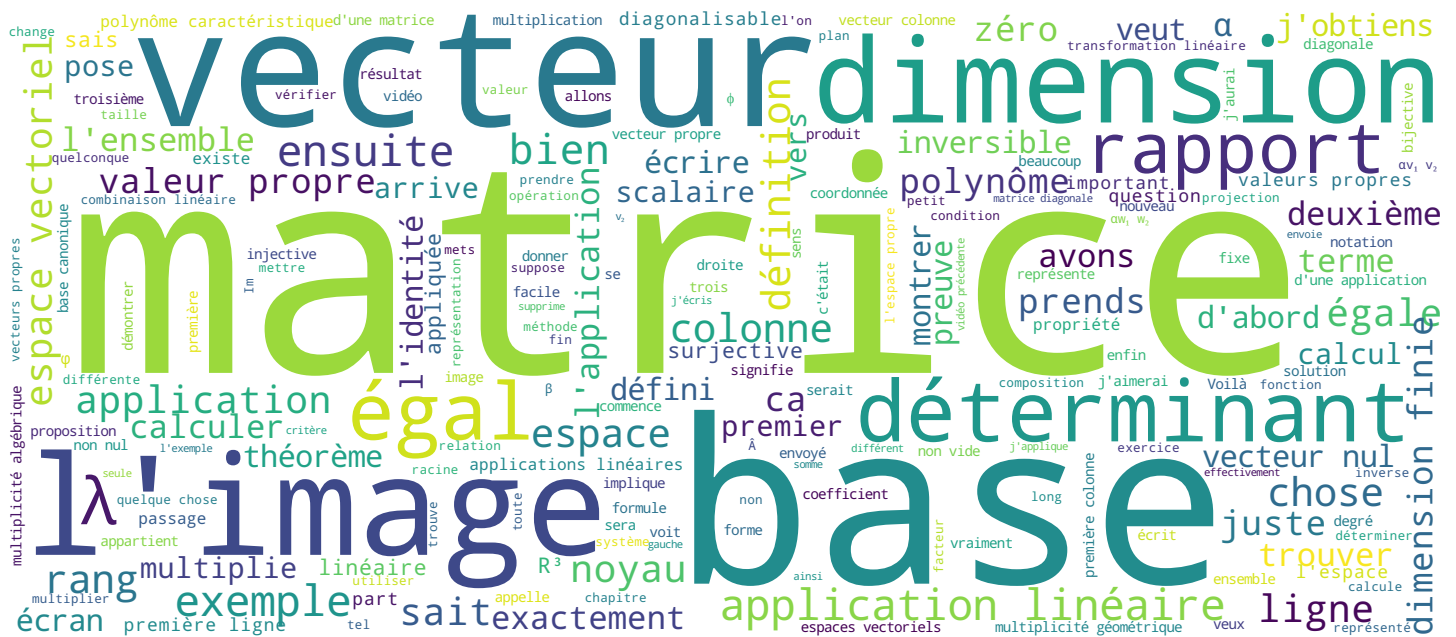


Chapitre 5 : Applications linéaires

5.6 L'image d'une application linéaire et rang

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC



Video





5.6 L'image d'une application linéaire et rang

Dans la vidéo précédente, nous avons parlé du noyau d'une application linéaire. Dans cette vidéo, nous allons parler d'un autre concept associé aux applications linéaires, soit l'image de l'application linéaire. Je vais définir en même temps le rang d'une application linéaire.

Notes

Summary



0m 04s

Définition. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire de \mathbb{R} -espaces vectoriels V, W . On écrit $\text{Im}(T)$ ou $\text{im}(T)$ pour l'ensemble $\{T(v) : v \in V\}$, et on l'appelle l'**image** de T . Si $\text{im}(T)$ est de dimension finie, on appelle $\dim \text{im}(T)$ le **rang** de T et on écrit $\text{rang}(T)$ ou $\text{rg}(T)$.

Premier constat

$T : V \rightarrow W$ est surjective $\Leftrightarrow \text{im}(T) = W$.

5.6 L'image d'une application linéaire et rang



Voici la définition. Je me donne une application linéaire T de V dans W puis j'introduis une notation : $\text{Im}(T)$ ou bien $\text{im}(T)$. On utilise les deux notations, donc si je me trompe, sachez que c'est la même chose. On écrit ça pour l'ensemble des images des vecteurs de V par T . C'est l'ensemble des $T(v)$, avec $v \in V$. On appelle cela l'image de T . C'est un sous-ensemble de W . Si l'image de T est de dimension finie, on appelle cette dimension le rang de T et on va écrire $\text{rang}(T)$, ça ou bien juste $\text{rg}(T)$. Si c'était en anglais ça serait "the rank of T " et on écrirait $\text{rank}(T)$ ou $\text{rk}(T)$ pour "rank". D'après la définition, un premier constat que l'on peut faire, qui n'est vraiment basé que sur la définition, c'est que l'application $T : V \rightarrow W$ est surjective si et seulement si son image est égale à W . Parce qu'être surjective cela signifie que pour chaque vecteur w dans W je peux trouver un vecteur v dans V tel que ce vecteur dans W soit $w = T(v)$. Ça signifie que l'image couvre entièrement W .

Notes

Summary



0m 22s

Définition. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire de \mathbb{R} -espaces vectoriels V, W . On écrit $\text{Im}(T)$ ou $\text{im}(T)$ pour l'ensemble $\{T(v) : v \in V\}$, et on l'appelle l'**image** de T . Si $\text{im}(T)$ est de dimension finie, on appelle $\dim \text{im}(T)$ le **rang** de T et on écrit $\text{rang}(T)$ ou $\text{rg}(T)$.

Premier constat

$T : V \rightarrow W$ est surjective $\Leftrightarrow \text{im}(T) = W$.

Si W est de dimension finie, T est surjective $\Leftrightarrow \text{rg}(T) = \dim W$.

5.6 L'image d'une application linéaire et rang



Aussi, si W est de dimension finie, alors T est surjective si et seulement si le rang de T est égal à la dimension de W . Ce premier constat nous amène à nous demander : est-ce que l'image est toujours un sous-espace ? Dans le cas où $\text{Im}(T) = W$, c'est un espace vectoriel (car W l'est), mais est-ce toujours le cas ?

Notes

Summary



1m 50s

Proposition. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire de \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W . Alors $\text{im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W .

Preuve $\text{im}(T) \neq \emptyset$ car V est non vide, p. ex. $T(0_V) = 0_W \in \text{im}(T)$.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $w_1, w_2 \in \text{im}(T)$.

Donc il existe $v_1, v_2 \in V$ t.q. $T(v_1) = w_1$ et $T(v_2) = w_2$.



5.6 L'image d'une application linéaire et rang



Notes

Regardons la proposition suivante. Je me donne une application R -linéaire de R -espaces vectoriels alors l'image de T est bien un sous-espace vectoriel de W . Je vais démontrer cela. Donc l'image est non-vide pour deux raisons. Premièrement, V est non-vide. Je peux prendre n'importe quel vecteur dans V que j'envoie dans W . Par exemple T du vecteur nul qui donne, on le sait, le vecteur nul dans W . Ainsi le vecteur nul de W , c'est dans l'image de T . À la fois on sait que l'image est non-vide et on sait aussi qu'il y a le vecteur nul dedans. Maintenant je prends un scalaire et deux vecteurs dans l'image : w_1, w_2 dans l'image de T . Je dois vous convaincre que $\alpha w_1 + w_2$ est aussi dans l'image. Avant de faire cela, je vais écrire ce que signifie la condition qui dit que les deux vecteurs w_1 et w_2 sont dans l'image. Donc il existe deux vecteurs v_1 et v_2 dans V tels que $T(v_1) = w_1$ et $T(v_2) = w_2$. Quel sera le vecteur dont l'image pourrait être $\alpha w_1 + w_2$? Je dois voir que ce vecteur est dans l'image.

Summary



2m 15s

Proposition. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire de \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W . Alors $\text{im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W .

Preuve $\text{im}(T) = \emptyset$ car V est non vide, p. ex. $T(0_V) = 0_W \in \text{im}(T)$.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $w_1, w_2 \in \text{im}(T)$.

Donc il existe $v_1, v_2 \in V$ t.q. $T(v_1) = w_1$ et $T(v_2) = w_2$.

$$\alpha w_1 + w_2 = \alpha T(v_1) + T(v_2) = \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ linéaire}}}{T(\alpha v_1 + v_2)}$$

Comme V est un espace vectoriel $\alpha v_1 + v_2 \in V$ et donc $T(\alpha v_1 + v_2) \in \text{im}(T)$.

$\alpha w_1 + w_2 \in \text{im}(T)$. Donc $\text{im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W . \square

5.6 L'image d'une application linéaire et rang



Ce vecteur est égal à $\alpha T(v_1) + T(v_2)$, et comme T est linéaire, j'obtiens que c'est la même chose que $T(\alpha v_1 + v_2)$ et comme V est un espace vectoriel, le vecteur $\alpha v_1 + v_2$ appartient à V et donc $T(\alpha v_1 + v_2)$ appartient par définition à l'image, et donc on obtient que $\alpha w_1 + w_2$ est dans l'image de T . C'est ça qui indique que l'image de T est un sous-espace vectoriel de W . Dans les exercices, vous verrez peut-être une preuve qui est très similaire. On n'a pas tellement utilisé ici le fait que l'on pourrait avoir V et à l'intérieur, un sous-espace vectoriel de V . Donc si vous avez une application linéaire de V dans W et que vous prenez par exemple U , un sous-espace de V , et que vous lui appliquez une application linéaire, alors l'image de ce U va aussi être un sous-espace. C'est à peu près la même preuve. J'ai encore quelques remarques avant de passer aux exemples.

Notes

Summary



3m 56s

Remarque Soit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire, V, W \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie

$\ker(T)$ sous-espace de V , $\dim(\ker(T)) \leq \dim V$.

$\operatorname{im}(T)$ sous-espace de W , $\dim(\operatorname{im}(T)) = \operatorname{rang}(T) \leq \dim W$.

Exemples ① $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ (la projection orthogonale sur le plan xy)

im

5.6 L'image d'une application linéaire et rang



Dans le cas des espaces de dimension finie, prenons $T: V \rightarrow W$, une application linéaire où V et W sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. On peut remarquer que le noyau, on sait que c'est un sous-espace donc il fait sens de parler de sa dimension. C'est un sous-espace de V donc sa dimension est au plus la dimension de V . On est dans le cas d'espaces de dimension finie. L'image de T est un sous-espace de W et donc la dimension de l'image, qui est le rang de T , est au plus la dimension de W . Ensuite, dans la prochaine vidéo, nous allons voir un lien très étroit entre ces deux dimensions. C'est très important. Deux exemples que nous avons déjà vus. On prend le T qui part de \mathbb{R}^3 et qui arrive dans \mathbb{R}^3 , défini par $T(x, y, z) = (x, y, 0)$, nous avons déjà vu cet exemple, c'est l'exemple de la projection orthogonale dans \mathbb{R}^3 , sur le plan xy . Quel est le rang ici ? L'image de T c'est l'ensemble des vecteurs de la forme $(x, y, 0)$, donc si on se permet d'avoir (x, y, z) *quelconque* dans \mathbb{R}^3 , c'est qu'on peut obtenir tous les vecteurs de la forme $(x, y, 0)$ et donc la dimension de cet espace est deux.

Notes

Summary



Remarque Soit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire, V, W \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie

$\ker(T)$ sous-espace de V , $\dim(\ker(T)) \leq \dim V$.

$\text{im}(T)$ sous-espace de W , $\dim(\text{im}(T)) = \text{rang}(T) \leq \dim W$.

Exemples ① $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ (la projection orthogonale sur le plan xy)

$\text{im}(T) = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ $\text{rang}(T) = 2$
base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

② $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $S(x, y) = (x, y, 0)$. $\text{im}(S) = \text{im}(T)$.
 $\text{rang}(S) = 2$.

5.6 L'image d'une application linéaire et rang



On prend ici une base qui sera $\{(1 \ 0 \ 0), (0 \ 1 \ 0)\}$. Deuxième exemple, qui ressemble beaucoup au premier. Je définis une application S qui part de \mathbb{R}^2 et qui arrive dans \mathbb{R}^3 et je définis S par $S(x \ y) = (x \ y \ 0)$ donc en fait ici l'image de S est exactement la même chose que l'image de T et donc le rang de S qui est censé juste mesurer la dimension de l'image de S est égal au rang de T donc c'est aussi deux. Ceci est important. On croit qu'il est plus important de considérer ce qui se passe dans l'espace de départ mais ce qui compte le plus c'est l'espace d'arrivée et la taille de l'image. Donc je voulais comparer ces deux exemples. Dans la vidéo suivante, nous verrons ce qui s'appelle le théorème du rang, et c'est ce qui établit un lien entre toutes ces dimensions dans le cas des espaces de dimension finie.

Notes

Summary

