





### 5.7 Le théorème du rang

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié des applications linéaires, nous avons défini ce qu'est le noyau et l'image et je vous ai prévenus qu'il y aurait un lien entre la dimension du noyau, la dimension de l'image, la dimension des espaces  $V$  et  $W$ , dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie. Ce lien est établi dans ce qu'on appelle le théorème du rang et c'est un théorème très utile et très important. Dans cette vidéo, je vais énoncer et démontrer le théorème. Dans la vidéo suivante, nous verrons des applications, des conséquences et des exemples. Vous serez convaincus que c'est extrêmement utile.

Notes

Summary



0m 04s

**Théorème (du rang).** Soient  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $W$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire. Alors  $\text{im}(T)$  est de dimension finie et  $\dim V = \dim \ker(T) + \dim \text{im}(T)$ .

Preuve  $V$  est de dimension finie, donc  $\ker T$  est aussi de dimension finie.  
 Fixons une base  $(v_1, \dots, v_s)$  de  $\ker(T)$ , et une base de  $V$   
 $(v_1, v_2, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$ .  $\dim \ker T = s$ ,  $\dim V = n$ .

## 5.7 Le théorème du rang



Donc voici l'énoncé du théorème. On se donne un  $R$ -espace vectoriel de dimension finie  $V$ , et  $W$ , un  $R$ -espace vectoriel.  $W$  n'est pas obligé d'être de dimension finie. Ensuite, je prends une application linéaire de  $T: V \rightarrow W$ . Tout d'abord, l'image de  $T$  va être de dimension finie. On ne sait pas si  $W$  est de dimension finie mais c'est sûr que l'image, elle, est de dimension finie. Puis, il y a une égalité entre la dimension de  $V$  et la somme des dimensions de l'image de  $T$  et de son noyau. Donc voilà notre théorème du rang. Je vais démontrer ce théorème parce que c'est très important. Preuve :  $V$  est de dimension finie par hypothèse, donc le noyau est de dimension finie. Je fixe une base du noyau:  $(v_1, \dots, v_s)$ , puis je vais la compléter en une base de  $V$  qui contient cette base-là donc j'aurai  $(v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$  Ici j'ai que la dimension du noyau est égale à  $s$ , la dimension de  $V$  est égale à  $n$ . Maintenant je prétends que si je prends  $\{T(v_{s+1}), \dots, T(v_n)\}$ , ceci est une base de l'image.

Notes

Summary



0m 42s

**Théorème (du rang).** Soient  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $W$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire. Alors  $\text{im}(T)$  est de dimension finie et  $\dim V = \dim \ker(T) + \dim \text{im}(T)$ .

Preuve  $V$  est de dimension finie, donc  $\ker T$  est aussi de dimension finie.

Fixons une base  $(v_1, \dots, v_s)$  de  $\ker(T)$ , et une base de  $V$

$(v_1, v_2, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$ .  $\dim \ker T = s$ ,  $\dim V = n$ .

On montre que  $\{T(v_{s+1}), \dots, T(v_n)\}$  est une base de  $\text{im}(T)$ .

$$n = \dim(\ker T) + \dim(\text{im} T) \\ s + n - s$$

## 5.7 Le théorème du rang



Si je réussis à démontrer cela, j'aurai gagné, parce que je trouverai que  $n$  est égal à  $s$ , qui est la dimension du noyau, plus  $n - s$  qui est la dimension de l'image. Il suffit de démontrer cela, mais pour le faire il y a deux choses à montrer.

Notes

Summary



2m 21s

**Rappel.** On a  $(v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$  base de  $V$  et  $(v_1, \dots, v_s)$  base de  $\ker(T)$ .

A montrer :  $(T(v_{s+1}), \dots, T(v_n))$  base de  $\text{im}(T)$ .

Génération: Soit  $w \in \text{im}(T)$ . Il existe  $v \in V$  t.q.  $w = T(v)$ . Comme  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $V$ ,  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ , pour certains  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .

$$w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \underbrace{T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s)}_{\in \ker T} + T(\alpha_{s+1} v_{s+1} + \dots + \alpha_n v_n).$$

## 5.7 Le théorème du rang

J'ai fixé ici cette base de  $V$  de telle sorte que les  $s$  premiers vecteurs forment une base du noyau. Je vais vous montrer que l'image des  $n-s$  derniers vecteurs forme une base de l'image. D'abord je dois démontrer la génération. Je prends un  $w$  dans l'image et je dois voir que je peux l'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs-là. Comme  $w$  est dans l'Image, il existe un  $v \in V$  tel que  $w = T(v)$ . Mais comme j'ai une base:  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $V$ , je sais que le  $v$  que j'ai choisi s'écrit comme une combinaison linéaire des  $v_i$ :  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ , pour certains scalaires,  $\alpha_i$ . Maintenant le  $w$ , qui est égal à  $T(v)$ , est égal à  $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)$ . Je vais couper cela en deux. Comme c'est linéaire, c'est  $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s) + T(\alpha_{s+1} v_{s+1} + \dots + \alpha_n v_n)$ . Et maintenant tout cela appartient au noyau. Et  $T$  de quelque chose dans le noyau, par définition, c'est zéro.

Notes

Summary



**Rappel.** On a  $(v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$  base de  $V$  et  $(v_1, \dots, v_s)$  base de  $\ker(T)$ .

A montrer :  $(T(v_{s+1}), \dots, T(v_n))$  base de  $\text{im}(T)$ .

Génération : Soit  $w \in \text{im}(T)$ . Il existe  $v \in V$  t.q.  $w = T(v)$ . Comme  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $V$ ,  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ , pour certains  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .

$$w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = T(\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s}_{\in \ker T}) + T(\alpha_{s+1} v_{s+1} + \dots + \alpha_n v_n).$$

$$= 0_w + \alpha_{s+1} T(v_{s+1}) + \dots + \alpha_n T(v_n)$$

$$= \alpha_{s+1} T(v_{s+1}) + \dots + \alpha_n T(v_n). \text{ Donc } (T(v_{s+1}), \dots, T(v_n)) \text{ engendre linéairement } \text{im}(T).$$

## 5.7 Le théorème du rang



Donc c'est égal à  $0_w$  et ici  $T$  est linéaire, donc je peux décomposer la deuxième partie:  $\alpha_{s+1} T(v_{s+1}) + \dots + \alpha_n T(v_n)$ . Donc ici, j'oublie ce zéro donc j'ai  $\alpha_{s+1} T(v_{s+1}) + \dots + \alpha_n T(v_n)$ . Effectivement, j'ai écrit  $w$  comme une combinaison linéaire de ces vecteurs-là donc ceci est la génération. Cet ensemble de vecteurs engendre linéairement l'image.

Notes

Summary



Indépendance linéaire.

Supposons que  $\lambda_{s+1}T(v_{s+1}) + \dots + \lambda_n T(v_n) = 0_W$

$T$  linéaire :  $T(\lambda_{s+1}v_{s+1} + \dots + \lambda_nv_n) = 0_W$

Par définition de  $\ker(T)$ ,  $\lambda_{s+1}v_{s+1} + \dots + \lambda_nv_n \in \ker(T) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_s)$

## 5.7 Le théorème du rang



Maintenant je dois démontrer l'indépendance linéaire. Je suppose que j'ai des scalaires: supposons que  $\lambda_{s+1}T(v_{s+1}) + \dots + \lambda_n T(v_n) = 0$  dans l'espace vectoriel  $W$ . Maintenant  $T$  est linéaire. J'ai fait ceci souvent mais je le refais.  $T$  est linéaire donc je peux mettre tout cela ensemble et j'ai  $T(\lambda_{s+1}v_{s+1} + \dots + \lambda_nv_n) = 0_W$ . Ce zéro à droite est le zéro dans  $W$ . Donc, par définition du noyau, ce vecteur-là est un vecteur qui est envoyé à zéro, donc il appartient au noyau:  $\lambda_{s+1}v_{s+1} + \dots + \lambda_nv_n \in \ker(T)$ . Mais le  $\ker(T)$  a une base qui est formée de  $v_1, \dots, v_s$ . Donc il est engendré par les vecteurs  $v_1, \dots, v_s$ . Du coup, ce vecteur-là, je vais l'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs-là :  $\lambda_{s+1}v_{s+1} + \dots + \lambda_nv_n =$  on doit choisir d'autres scalaires, disons  $\beta_1v_1 + \dots + \beta_sv_s$  pour certains  $\beta_i \in \mathbb{R}$ .

Notes

Summary



5m 11s

Indépendance linéaire.

Supposons que  $\lambda_{s+1}T(v_{s+1}) + \dots + \lambda_n T(v_n) = 0_w$

$T$  linéaire :  $T(\lambda_{s+1}v_{s+1} + \dots + \lambda_nv_n) = 0_w$

Par définition de  $\ker(T)$ ,  $\lambda_{s+1}v_{s+1} + \dots + \lambda_nv_n \in \ker(T) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_s)$

Donc  $\lambda_{s+1}v_{s+1} + \dots + \lambda_nv_n = \beta_1v_1 + \dots + \beta_sv_s$  pour  $\beta_i \in \mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow \beta_1v_1 + \dots + \beta_sv_s - \lambda_{s+1}v_{s+1} - \dots - \lambda_nv_n = 0.$$

Mais  $v_1, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants car ils forment une base de  $V$ .

$\Rightarrow \beta_i = 0$  pour tout  $i$  et  $\lambda_j = 0$  pour tout  $j$ .

$\Rightarrow T(v_{s+1}), \dots, T(v_n)$  sont linéairement indépendants.  $\square$

## 5.7 Le théorème du rang



J'ai presque terminé, je mets tout ça d'un côté, et j'obtiens que  $\beta_1v_1 + \dots + \beta_sv_s - \lambda_{s+1}v_{s+1} - \dots - \lambda_nv_n = 0$ . Ceci est une combinaison linéaire des vecteurs de la base de  $V$  qui vaut zéro. Mais  $v_1, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants car ils forment une base de  $V$ , et par la définition de l'indépendance linéaire, cette combinaison-là étant égale à zéro, la seule possibilité est que tous les  $\beta_i = 0$  pour tout  $i$  ainsi que tous les  $\lambda_j = 0$ . Ce qui m'intéresse ce sont les  $\lambda_j$ . Cela signifie que la seule combinaison linéaire de  $T(v_{s+1}), \dots, T(v_n)$  qui vaut zéro est la combinaison linéaire où tous les scalaires sont nuls, donc  $T(v_{s+1}), \dots, T(v_n)$  sont aussi linéairement indépendants. Nous avons démontré l'indépendance linéaire et la génération, donc cela forme une base. La preuve est terminée. J'aimerais terminer avec une illustration. Je n'ai pas tellement parlé de l'intuition. L'idée du théorème du rang est la suivante. Disons que ce cercle est notre ensemble  $V$ .

Notes

Summary





Indépendance linéaire.

Supposons que  $\lambda_{s+1}T(v_{s+1}) + \dots + \lambda_n T(v_n) = 0_W$

$T$  linéaire :  $T(\lambda_{s+1}v_{s+1} + \dots + \lambda_nv_n) = 0_W$

Par définition de  $\ker(T)$ ,  $\lambda_{s+1}v_{s+1} + \dots + \lambda_nv_n \in \ker(T) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_s)$

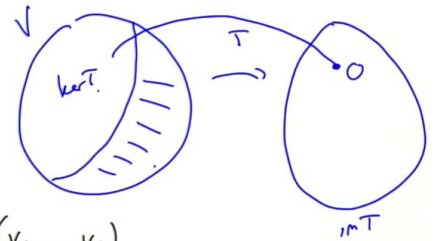
Donc  $\lambda_{s+1}v_{s+1} + \dots + \lambda_nv_n = \beta_1v_1 + \dots + \beta_sv_s$  pour  $\beta_i \in \mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow \beta_1v_1 + \dots + \beta_sv_s - \lambda_{s+1}v_{s+1} - \dots - \lambda_nv_n = 0.$$

Mais  $v_1, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants car ils forment une base de  $V$ .

$\Rightarrow \beta_i = 0$  pour tout  $i$  et  $\lambda_j = 0$  pour tout  $j$ .

$\Rightarrow T(v_{s+1}), \dots, T(v_n)$  sont linéairement indépendants.  $\square$



## 5.7 Le théorème du rang

Nous l'envoyons dans un  $W$  qui peut être immense, il peut être de dimension infinie. Ce qui est sûr, c'est qu'on l'envoie dans l'image, d'ailleurs sur l'image de  $T$  par  $T$ . Ce que le théorème dit, c'est qu'il y a une partie de  $V$  qui est écrasée à un point, ce qui constitue le noyau. Toute cette partie est écrasée sur le point zéro. Et tout le reste est envoyé de façon presque bijective sur le reste. Donc tout ça est écrasé sur zéro et le reste arrive pile sur l'image. C'est pourquoi cette partie-ci est la dimension image et cette partie-là est la dimension du noyau et la somme des deux forme  $V$ . Voilà l'idée. Dans la prochaine vidéo, nous verrons des conséquences de ce théorème du rang et des exemples de son utilisation.

Notes

Summary

