



5.7 Le théorème du rang (suite)



Maintenant nous avons vu le théorème du rang, juste la démonstration, (je vais vous le rappeler dans la prochaine slide), je vais vous montrer quelques conséquences très utiles de ce théorème, puis nous ferons des exemples avec ces conséquences et vous verrez à quel point c'est utile.

Notes

Summary



0m 04s

V de dimension finie

$T: V \rightarrow W$.

Théorème $\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T)$.

Conséquences ① $\dim(\operatorname{im} T) = \dim V - \dim \ker(T) \Rightarrow \dim(\operatorname{im} T) \leq \dim V$.

②



5.7 Le théorème du rang (suite)



Notes

Rappelons d'abord le théorème : je me donne V qui est un espace vectoriel de dimension finie. Je me donne aussi W , un espace vectoriel quelconque et T , une application de V dans W . Le théorème du rang dit que la dimension de V se coupe en deux: il y a la dimension du noyau (c'est la partie qui est envoyée à zéro) et la partie qui arrive vraiment, et c'est la dimension de l'image de T . C'est le théorème. Maintenant, quelques conséquences de cela et ensuite nous utiliserons ces conséquences. D'abord, la dimension de l'image de T est égale à la dimension de V moins la dimension du noyau de T . C'est clair. Cela signifie quelque chose d'important : la dimension de l'image est au plus la dimension de V . Donc l'image ne peut pas avoir une dimension plus grande que la dimension de l'espace de départ. De cela, nous déduirons deux autres choses. Si T est injective, cela signifie que le noyau de T est zéro et si je reprends la première équation, la dimension de V est égale à la dimension de l'image de T qui est au plus la dimension de W .

Summary



0m 23s

V de dimension finie

$T: V \rightarrow W$.

Théorème $\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T)$.

Conséquences ① $\dim(\operatorname{im} T) = \dim V - \dim \ker(T) \Rightarrow \dim(\operatorname{im} T) \leq \dim V$.

② Si T est injective, $\ker(T) = \{0\}$, $\dim V = \dim(\operatorname{im} T) \leq \dim W$.

③ Si T est surjective, $W = \operatorname{im}(T)$, donc $\dim W \leq \dim V$.

Exemples ①



5.7 Le théorème du rang (suite)



Donc si on a une application qui est injective, forcément la dimension de l'espace de départ est plus petite ou égal à la dimension de l'espace d'arrivée. Ceci est déjà très utile. Une autre conséquence : si T est surjective, alors W est l'image de T , c'est la définition de surjective, et cela implique que la dimension de W , la dimension de l'image, est au plus la dimension de V . Donc si T est surjective, la dimension de W ne peut pas être plus grande que la dimension de V . L'idée est la suivante. Vous avez un espace d'une certaine taille. S'il est trop grand, on ne peut pas le pousser injectivement dans le W donc si la dimension de V est plus grande que la dimension de W , forcément quelque chose est envoyé à zéro. Et de l'autre côté, si vous avez une application qui est surjective, il faut que l'espace de départ soit assez grand pour couvrir le W . On peut en perdre un peu à cause du noyau, mais il doit être assez grand pour couvrir W . C'est assez intuitif. Voici quelques petits exemples. Ici j'ai T qui est une application linéaire de $M_{2 \times 2}(R)$ et qui est envoyée à R^3 .

Notes

Summary



2m 11s

V de dimension finie

$T: V \rightarrow W$.

Théorème $\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T)$.

Conséquences ① $\dim(\operatorname{im} T) = \dim V - \dim \ker(T) \Rightarrow \dim(\operatorname{im} T) \leq \dim V$.

② Si T est injective, $\ker(T) = \{0\}$, $\dim V = \dim(\operatorname{im} T) \leq \dim W$.

③ Si T est surjective, $W = \operatorname{im}(T)$, donc $\dim W \leq \dim V$.

Exemples ① $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ne peut pas être injective.
 $\dim 4 \quad \dim 3$.

② $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ ne peut pas être surjective.
 $\dim 2 \quad \dim 3$

5.7 Le théorème du rang (suite)



Donc ici j'ai un espace de dimension 4 et ici j'ai un espace de dimension 3. Celui-ci est trop grand pour être envoyé injectivement dans le suivant. Donc cela ne peut pas être injective, car le premier espace est trop grand. Deuxième exemple : ici j'ai T , une application linéaire qui part disons de \mathbb{R}^2 et qui va vers les polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels. Donc ici j'ai un espace de dimension 2 et là j'ai un espace de dimension 3. Je pars d'un espace de dimension 2 et je vais vers un espace plus grand donc il n'y a aucune chance que l'application soit surjective. Le premier espace n'est tout simplement pas assez grand pour couvrir le deuxième. Donc cela ne peut pas être surjective. Ce sont des petits exemples, maintenant on va faire des plus grands exemples, mais ça vaut vraiment la peine de vous arrêter une minute et bien lire ces conséquences car vous allez les utiliser fréquemment, et ces petits exemples.

Notes

Summary



3m 44s

Exemples.

(1) Soit $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $T(a, b, c, d, e) = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ d & e \end{pmatrix}$. On admet que T est une application linéaire.

Par le théorème du rang,

$$5 = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T), \text{ et } \dim(\operatorname{im} T) \leq 4.$$

$$\dim(\ker T) \geq 1. \quad T \text{ n'est pas injective.}$$

5.7 Le théorème du rang (suite)



Maintenant un grand exemple où l'on doit faire des calculs. Je me donne une application qui part de \mathbb{R}^5 et qui arrive dans les matrices 2×2 à coefficients réels. Je donne la définition. Nous allons admettre que T est linéaire. Avant de travailler cet exemple, nous faisons un premier constat. Que peut-on déduire seulement à partir des dimensions ? Donc un espace de dimension 5 est envoyé vers un espace de dimension 4. Par le théorème du rang, nous avons 5 est égal à la dimension du noyau plus la dimension de l'image et nous savons que la dimension de l'image est au plus 4. De cela, nous déduisons que la dimension du noyau... déjà nous savons que le noyau est non-trivial, parce que j'ai au plus 4 plus quelque chose qui donne 5, et en plus je sais que la dimension du noyau est au moins 1. Donc ce n'est pas trivial. On sait que T n'est pas injective. Donc sans faire de calculs, nous savons que T n'est pas injective. C'est là la puissance du théorème du rang. Par contre, il se pose une question : T est-elle surjective ?

Notes

Summary



4m 51s

Exemples.

(1) Soit $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $T(a, b, c, d, e) = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ d & e \end{pmatrix}$. On admet que T est une application linéaire.

Par le théorème du rang,

$$5 = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T), \text{ et } \dim(\operatorname{im} T) \leq 4.$$

$$\dim(\ker T) \geq 1. \quad T \text{ n'est pas injective.}$$

T est-elle surjective? Càd, est-ce que $\operatorname{im}(T) = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$?

$$\ker(T) = \{(a, b, c, d, e) \mid \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}.$$

$$\begin{aligned} a+b &= 0 \\ c+d &= 0 \\ d &= 0 \\ e &= 0 \end{aligned}$$

$$= \{(a, b, c, 0, 0) \mid \begin{pmatrix} a+b & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

$$= \{$$

est-ce que $\dim(\operatorname{im} T) = 4$?

$$a = -b$$

$$c = 0$$

5.7 Le théorème du rang (suite)

Pour la surjectivité, je peux poser la question annexe, c'est-à-dire est-ce que l'image de T est égale aux matrices 2×2 à coefficients réels? C'est la même question que : est-ce que la dimension de l'image est 4? Au lieu de commencer avec cette question-ci, je vais répondre à la deuxième question d'abord, qui va me donner la réponse de la première. Pour trouver la dimension de l'image, je ne vais pas travailler avec l'image, je vais travailler avec le noyau et cette égalité-là. C'est le noyau qui est le plus facile à calculer. Le noyau de T est formé de tous les vecteurs dans \mathbb{R}^5 tels que, bon cette fois je vais sauter une étape: tels que cette matrice-là est égale à la matrice nulle. Cela me donne un petit système d'équations : $a + b = 0$, $c + d = 0$, $d = 0$, $e = 0$. Cette fois, je ne vais pas échelonner une matrice parce que ce système est très simple. Tous les vecteurs, $(a, b, c, 0, 0)$ ($d = 0$ et $e = 0$), tels que [voir écran] Donc pour tous les vecteurs il faut que $a = -b$ et que $c = 0$. Donc ce sont tous les vecteurs $(a, -a, 0, 0, 0)$, où a est un nombre réel.

Notes

Summary



Exemples.

(1) Soit $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $T(a, b, c, d, e) = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ d & e \end{pmatrix}$. On admet que T est une application linéaire.

Par le théorème du rang,

$$* \quad 5 = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T), \text{ et } \dim(\operatorname{im} T) \leq 4.$$

$$\dim(\ker T) \geq 1. \quad T \text{ n'est pas injective.}$$

T est-elle surjective? Càd, est-ce que $\operatorname{im}(T) = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$? est-ce que $\dim(\operatorname{im} T) = 4$?

$$\ker(T) = \{(a, b, c, d, e) \mid \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}.$$

$$\begin{aligned} a+b &= 0 \\ c+d &= 0 \\ d &= 0 \\ e &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= -b \\ c &= 0 \end{aligned}$$

$$= \{(a, b, c, d, e) \mid \begin{pmatrix} a+b & c \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

$$= \{(a, -a, 0, 0, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \quad \text{base de } \ker(T) = \{(1, -1, 0, 0, 0)\}. \quad \text{Donc } \dim(\ker T) = 1.$$

$$\text{Donc } 5 = 1 + \dim(\operatorname{im} T) \Rightarrow \dim(\operatorname{im} T) = 4 \Rightarrow \operatorname{im}(T) = M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ et par conséquent, } T \text{ est surjective.}$$



5.7 Le théorème du rang (suite)

Nous constatons qu'il y a un seul paramètre, nous voyons comment trouver une base, donc une base du noyau est $\{(1, -1, 0, 0, 0)\}$, donc le noyau est de dimension 1. Maintenant je reviens ici à cette égalité, donc nous avons $5 = 1 + \dim(\operatorname{im}(T))$ donc nous en déduisons que la dimension de l'image est égale à 4 et cela implique que l'image de T est égale à l'espace entier et par conséquent que T est surjective. C'est très joli, c'est vraiment une méthode très simple pour déterminer si une application est surjective ou non. Je pense que vous aurez abordé ça dans les exercices avant et vous savez qu'il n'est pas très facile en général de déterminer si une application est surjective, mais dès que nous avons un V de dimension finie et une application linéaire, cela devient facile.

Notes

Summary



Exemples.

(1) Soit $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(a, b, c, d, e) = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ d & e \end{pmatrix}$$

(2) Soit $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(0) - p(1) & p(0) + p(1) \end{pmatrix}$$

Le théorème du rang $\Rightarrow 3 = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im } T)$
 Dmc $\dim(\text{Im } T) \leq 3 \Rightarrow T$ n'est pas surjective !

T est-elle injective.

$$\ker(T) = \left\{ p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(0) - p(1) & p(0) + p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{ \}$$

5.7 Le théorème du rang (suite)



Voici un deuxième exemple. Cette fois je prends une application qui part des polynômes de degré au plus 2 et qui arrive dans les matrices 2×2 comme précédemment. Nous faisons un premier constat basé sur le théorème du rang. Le théorème du rang dit que la dimension de l'espace de départ, qui est 3 est égale à la dimension du noyau plus la dimension de l'image donc en particulier, la dimension de l'image est au plus 3, donc jamais 4, donc T n'est pas surjective. Nous pouvons quand même poser la question : T est-elle injective ? Il se peut que cet espace soit envoyé de façon injective, il y a de la place, c'est cela l'idée. C'est de dimension 3, on pourrait la placer injectivement à l'intérieur de l'espace à droite. Pour déterminer si T est injective, je vais utiliser le critère qui consiste à regarder son noyau et déterminer si le noyau est nul ou non, donc je regarde le noyau de T . Cela serait tous les polynômes, $p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, tels que l'image par T est égale à 0 [voir écran] Maintenant j'écris cette matrice. Tous les $a + bx + cx^2$ polynômes de degré au plus 2 tels que...

Notes

Summary



Exemples.

(1) Soit $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(a, b, c, d, e) = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ d & e \end{pmatrix}$$

(2) Soit $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(0) - p(1) & p(0) + p(1) \end{pmatrix}$$

Le théorème du rang $\Rightarrow 3 = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im} T)$
 Donc $\dim(\operatorname{Im} T) \leq 3 \Rightarrow T$ n'est pas surjective !

T est-elle injective.

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \left\{ p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(0)-p(1) & p(0)+p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ a+bx+cx^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ -b-c & 2a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 0 \\ a+b+c &= 0 \\ -b-c &= 0 \\ 2a+b+c &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= 0 \\ b+c &= 0 \end{aligned}$$

$$\ker(T) = \{ bx - bx^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R} \}$$

base de $\ker(T)$ est $\{x - x^2\}$.

Donc $\dim(\ker T) = 1$.

5.7 Le théorème du rang (suite)

donc cette matrice c'est quoi ? Je substitue zéro dans ce polynôme, j'obtiens a , je substitue 1 dans ce polynôme, j'obtiens $a + b + c$, ensuite je fais la différence de ces deux-là donc ça moins ça c'est $-b - c$ et ensuite je fais la somme de ces deux coordonnées-là et j'obtiens $2a + b + c$ donc ceci est l'image de ce polynôme et cela doit être égal à zéro. Comme d'habitude cela me donne un système d'équations, un système homogène d'équations, donc j'ai $a = 0$, $a+b+c = 0$, $-b-c = 0$, et $2a+b+c = 0$. Maintenant, si j'applique que $a = 0$, ce système devient $a = 0$, $b+c = 0$, cette équation est la même que celle-ci et celle-là est la même que celle-là. Donc j'ai la condition que $a = 0$ et que $c = -b$. Donc le noyau est formé de tous les polynômes de la forme $bx - bx^2$ où b est un nombre réel. Vous voyez qu'il y a un seul paramètre, une base du noyau: je pourrais prendre le polynôme $x - x^2$ où je pose le paramètre $b=1$, donc la dimension de $\ker(T)$ est égale à 1. Je n'ai pas besoin de la dimension pour cette partie, si je veux juste répondre à la question sur l'injectivité.

Notes

Summary



Exemples.

(1) Soit $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(a, b, c, d, e) = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ d & e \end{pmatrix}$$

(2) Soit $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(0) - p(1) & p(0) + p(1) \end{pmatrix}$$

Le théorème du rang $\Rightarrow 3 = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{im } T)$

Donc $\dim(\text{im } T) \leq 3 \Rightarrow T$ n'est pas surjective !

T est-elle injective ?

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \left\{ p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(0)-p(1) & p(0)+p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ a+bx+cx^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ -b-c & 2a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} a=0 \\ a+b+c=0 \\ -b-c=0 \\ 2a+b+c=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a=0 \\ b+c=0 \end{array}$$

$$\ker(T) = \{ bx - bx^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \}$$

base de $\ker(T)$ est $\{x - x^2\}$.

Donc $\dim(\ker(T)) = 1$.

T n'est pas injective.

(En plus, on connaît la dimension de l'image car $3 = 1 + \dim(\text{im } T)$. Donc $\dim(\text{im } T) = 2$.)

5.7 Le théorème du rang (suite)



Ici, j'aurais pu déjà dire que le noyau n'est pas $\{0\}$ et donc que T n'est pas injective mais je veux aussi vérifier le théorème du rang, donc ici je sais que T n'est pas injective et je veux aussi déterminer la dimension de l'image, donc ici en plus, ce n'était pas la question mais je vais faire une parenthèse: on connaît la dimension de l'image car on a $3 = 1 + \dim(\text{im}(T))$ donc la dimension de l'image est 2. Ceci est une question annexe. J'ai posé la question : T est-elle injective ? Ensuite quand j'ai trouvé que le noyau est non-nul je sais qu'elle n'est pas injective, mais je peux aller plus loin et dire quelque chose de quantitatif sur l'image. Je n'ai pas le sous-espace de l'image mais je connais sa dimension.

Notes

Summary



13m 06s