



Ici, nous continuons avec des conséquences du théorème du rang. C'est un grand théorème dans le cours et il y a plusieurs conséquences très utiles. Ici, on obtient un critère pour déterminer si une application linéaire est bijective ou non.

[illegible]



QR code linking to the document

Summary



Corollaire du théorème du rang. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire d'espaces vectoriels de dimension finie.

- (1) Si T est bijective alors $\dim V = \dim W$.
- (2) Si $\dim V = \dim W$ et T est injective, alors T est bijective.
- (3) Si $\dim V = \dim W$ et T est surjective, alors T est bijective.

Preuve : (1)



5.8 Critère de bijectivité



C'est un corollaire du théorème du rang qui dit la chose suivante : Je me donne une application linéaire, et, cette fois, c'est d'un espace vectoriel de dimension finie vers un autre espace vectoriel de dimension finie. Les trois énoncés sont les suivants : Si T est bijective, alors on sait que la dimension de V est égale à celle de W . Deuxième énoncé : Si la dimension de V est égale à la dimension de W , et T est injective, alors, en fait, on sait déjà que T est bijective. Troisième énoncé : Si la dimension de V est égale à celle de W , et T est surjective, là aussi, on sait que T est bijective. Donc vous voyez que ce qu'on a gagné, dans le (2) et le (3) : c'est que, normalement, pour vérifier bijectivité, on doit vérifier injective et surjective, mais, ici, grâce au fait que V et W ont la même dimension, on n'a qu'à vérifier une des deux conditions. C'est ça que dit le (2) et le (3). Je démontre ce théorème. Preuve : C'est vraiment des conséquences presque immédiates du théorème. C'est pour ça qu'on appelle ça un corollaire. Donc, la (1). Je suppose que T est bijective, c'est l'hypothèse.

Notes

Summary



0m 19s

Corollaire du théorème du rang. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire d'espaces vectoriels de dimension finie.

- (1) Si T est bijective alors $\dim V = \dim W$.
- (2) Si $\dim V = \dim W$ et T est injective, alors T est bijective.
- (3) Si $\dim V = \dim W$ et T est surjective, alors T est bijective.

Preuve : (1) Supposons T bijective. Dmc T est injective et dmc $\ker T = \{0\}$.
 T est surjective et dmc $\text{im}(T) = W$.

Thm du rang: $\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\text{im } T) = 0 + \dim(W) = \dim(W)$.

- (2) Supposons que $\dim V = \dim W$ et que T est injective. T injective $\Rightarrow \ker(T) = \{0\}$.

Thm du rang:



5.8 Critère de bijectivité



Notes

Donc, supposons, T bijective. Bijective, ça veut dire que, d'une part, T est injective, et donc, par le théorème que nous avons montré, le noyau de T est égal à 0 , et, de l'autre côté, on sait aussi que T est surjective, et donc, l'image de T est égale à W . Maintenant, j'applique le théorème du rang qui dit que la dimension de V est égale à la dimension du noyau plus la dimension de l'image. Comme le noyau est trivial, la dimension du noyau, c'est 0 . Et ici, j'ai la dimension de l'image qui est la dimension de W . Et donc, ici à droite, j'ai la dimension de W . Donc, j'ai effectivement que la dimension de V est égale à la dimension de W . Maintenant, (2). Ici, je suppose que la dimension de V est égale à la dimension de W , et, aussi, que T est injective. De nouveau, T injective équivaut au fait que le noyau de T est trivial. Maintenant, de nouveau, j'applique le théorème du rang. Et j'ai que la dimension de V , qui est égale à celle de W par hypothèse, est égale à la dimension du noyau plus la dimension de l'image.

Summary



Corollaire du théorème du rang. Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire d'espaces vectoriels de dimension finie.

- (1) Si T est bijective alors $\dim V = \dim W$.
- (2) Si $\dim V = \dim W$ et T est injective, alors T est bijective.
- (3) Si $\dim V = \dim W$ et T est surjective, alors T est bijective.

Preuve : (1) Supposons T bijective. Dnc T est injective et dnc $\ker T = \{0\}$.
 T est surjective et dnc $\text{im}(T) = W$.

Thm du rang: $\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\text{im} T) = 0 + \dim(W) = \dim(W)$.

(2) Supposons que $\dim V = \dim W$ et que T est injective. T injective $\Rightarrow \ker(T) = \{0\}$.

Thm du rang: $\dim V = \dim W = \dim(\ker T) + \dim(\text{im} T) = 0 + \dim(\text{im} T) \Rightarrow \text{im} T = W$. dnc T est surjective.

Dnc T est bijective.

5.8 Critère de bijectivité



Le noyau est trivial, donc ça, c'est 0 plus la dimension de l'image. Donc maintenant, j'ai que l'image de T , qui est un sous-espace de W , est de la même dimension que la dimension de W . Et donc, ça, ça implique que l'image de T est égale à W . Ça, c'était quelque chose que nous avons montré avec la dimension des sous-espaces. J'ai un sous-espace qui est de même dimension, donc en fait c'est égal à l'espace entier. Donc maintenant, j'ai que T est injective par hypothèse, et ici, ça, ça veut dire que T est surjective, et donc, T est bijective. Enfin, le (3).

Notes

Summary



3m 37s

(3) Supposons que $\dim V = \dim W$ et que T est surjective.

$$T \text{ surjective} \Rightarrow \text{im } T = W \Rightarrow \dim(\text{im } T) = \dim W.$$

$$\text{Thém du rang} \quad \dim V = \underline{\dim W} = \dim(\text{im } T) + \dim(\ker T) = \underline{\dim W} + \underline{\dim(\ker T)}$$

$$\Rightarrow \dim \ker(T) = 0$$

$$\Rightarrow \ker T = \{0_V\}.$$

$$\Rightarrow T \text{ est injective.}$$

Donc T est bijective.



5.8 Critère de bijectivité



De nouveau, je suppose que la dimension de V est égale à la dimension de W , et aussi, cette fois, je suppose que T est surjective. T surjective, ça veut dire quoi ? Ça veut dire que l'image de T couvre W entièrement. Donc ça, ça veut dire que la dimension de l'image de T est égale à la dimension de W . Maintenant, appliquons le théorème du rang. J'ai la dimension de V qui, par hypothèse, est égale à la dimension de W . Par le théorème du rang, c'est égal à la dimension de l'image plus la dimension du noyau. Maintenant, la dimension de l'image, ici, c'est égal à la dimension de W plus la dimension du noyau. De cette égalité, ici, j'ai la dimension de W égale à la dimension de W plus la dimension du noyau. Donc ça, ça implique que la dimension du noyau est égale à 0. Et ça, ça implique que le noyau de T est juste trivial. Et par notre critère, ça, ça implique que T est injective. Donc, j'avais T surjective, maintenant, j'ai T injective, donc, T est bijective. Donc, on a gagné. On doit montrer une condition de moins dans le cas précis où on sait qu'on a deux espaces de même dimension. C'est la fin de la preuve. Appliquons ça à un exemple.

Notes

Summary



4m 23s

Exemple. $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 \\ a_3 - a_0 & a_0 \end{pmatrix}$

On admet que T est une application linéaire.

$$\dim \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = 4$$

$$\dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4.$$

Par le corollaire, T est bijective $\Leftrightarrow T$ est injective $\Leftrightarrow T$ est surjective.

Déterminons si T est bijective :



5.8 Critère de bijectivité



Voilà l'exemple. On a vu beaucoup d'applications linéaires dans ce chapitre. Je commence avec une application des polynômes de degré au plus trois, envoyés dans les matrices 2×2 . Et voilà la définition de l'application, donnée en termes des coefficients du polynôme. On admet, comme d'habitude, que T est linéaire. On est justement dans le cas où on a, ici, un espace de dimension 4, et là aussi. Donc la dimension des polynômes de degré au plus 3 est égale à 4. et la dimension des matrices 2×2 à coefficients réels est aussi égale à 4. Pour déterminer si T est bijective, c'est la même chose que déterminer si T est surjective, c'est la même chose que déterminer si T est injective. Donc les trois sont équivalentes. Donc, j'écris par le corollaire, T est bijective si et seulement si T est injective si et seulement si T est surjective. Là, on a vraiment gagné. Donc, déterminons si T est bijective. Je vais faire, comme d'habitude, la chose la plus simple. c'est de regarder le noyau. Donc, le noyau de T , c'est tous les polynômes $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tels que, cette matrice-là soit égale à la matrice nulle.

Notes

Summary



6m 21s

Exemple. $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 \\ a_3 - a_0 & a_0 \end{pmatrix}$

On admet que T est une application linéaire.

$$\dim \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = 4$$

$$\dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4.$$

Par le corollaire, T est bijective $\Leftrightarrow T$ est injective $\Leftrightarrow T$ est surjective.

Déterminons si T est bijective :

$$\ker(T) = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 \\ a_3 - a_0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{array}{l|l} a_1 - a_2 = 0 & a_1 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 & a_2 = 0 \\ a_3 - a_0 = 0 & a_3 = 0 \\ a_0 = 0 & a_0 = 0 \end{array}$$

$\ker T = \{0\} \Rightarrow T$ est injective, donc par le corollaire, T est bijective.



5.8 Critère de bijectivité

Comme d'habitude, ça me donne un petit système d'équations que j'écris ici à droite. J'ai $a_1 - a_2 = 0$, $a_2 - a_3 = 0$, $a_3 - a_0 = 0$, et $a_0 = 0$. Comme je sais que le système est assez simple, je vais tout de suite vous montrer la déduction. Ici, de ces deux équations là, j'obtiens que $a_3 = 0$. Et donc, de cette équation là, j'obtiens que $a_2 = 0$. Et ensuite que $a_1 = 0$. Ça, si on remonte, c'est très facile. Du coup, le noyau de T , c'est juste, (ici, j'ai $a_0 = 0$ aussi) donc c'est juste le polynôme 0. Et donc, T est injective. Donc, par le corollaire, T est bijective.

Notes

Summary

