





#### 5.9 Opérations avec des applications linéaires



Nous avons beaucoup parlé d'applications linéaires et du théorème du rang. Donc, on avait les applications linéaires, le noyau, l'image, le théorème du rang qui nous donne une relation entre les dimensions de ces sous-espaces. Et maintenant, on laisse ça de côté pour les deux derniers paragraphes de ce chapitre parce que je prépare un tout petit peu le terrain pour le prochain chapitre. Donc, ici je veux parler de ce qu'on peut faire pour fabriquer de nouvelles applications linéaires quand on a des applications linéaires données. C'est pour ça que j'appelle ça les opérations avec des applications linéaires. Je fais ça ici, et aussi dans la prochaine vidéo qui sera la fin du chapitre 5.

Notes

Summary



0m 04s

Soient  $T, S$  des applications linéaires de  $V$  dans  $W$  (des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels). Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On définit :

(1)  $\lambda T : V \rightarrow W, (\lambda T)(v) = \lambda \cdot T(v)$

(2)  $T + S : V \rightarrow W, (T + S)(v) = T(v) + S(v)$

Exercice: Vérifier que  $\lambda T$  et  $T + S$  sont des applications  $\mathbb{R}$ -linéaires de  $V$  dans  $W$ .

#### 5.9 Opérations avec des applications linéaires



Donc, je commence avec deux applications linéaires qui vont du même espace vectoriel  $V$  dans  $W$ . Donc, les deux applications partent de  $V$  et arrivent dans  $W$ . Et je me donne un scalaire, un nombre réel. Alors, je définis une application  $\lambda T$ . Donc, ça, c'est la notation. Et, cette application, elle fait quoi ? Quand je l'applique à un vecteur, ce qu'elle me donne, c'est le multiple scalaire par  $\lambda$  de l'image de  $V$  par l'application  $T$ . Donc, c'est la chose la plus naturelle à faire. Ensuite, je définis aussi la somme de  $T$  et  $S$ . Et puis, quelle est la définition ici ? Cette application-là, appliquée à  $V$ , ce qu'elle va faire, c'est que elle va trouver l'image de  $V$  par  $T$ , l'image de  $V$  par  $S$ , et elle fait la somme de ces deux images dans l'espace vectoriel  $W$ . Donc, de nouveau, c'est la chose la plus naturelle à faire. Et ici, je laisse ça comme exercice parce que je vais faire une troisième chose où je développe. Donc, c'est un exercice, ici, de vérifier que  $\lambda T$  et  $T + S$  sont de nouveau des applications linéaires. C'est un bon exercice pas trop compliqué.

Notes

Summary



0m 45s

Soient  $T, S$  des applications linéaires de  $V$  dans  $W$  (des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels). Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On définit :

(1)  $\lambda T : V \rightarrow W, (\lambda T)(v) = \lambda \cdot T(v)$

(2)  $T + S : V \rightarrow W, (T + S)(v) = T(v) + S(v)$

Exercice: Vérifier que  $\lambda T$  et  $T + S$  sont des applications  $\mathbb{R}$ -linéaires de  $V$  dans  $W$ .

(3) Soient  $U, V, W$  des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et  $T: U \rightarrow V$  et  $S: V \rightarrow W$ , des applications  $\mathbb{R}$ -linéaires. On a la composition  $S \circ T: U \rightarrow W$ . On montre que  $S \circ T$  est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire.

Soient  $u_1, u_2 \in U$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $(S \circ T)(\lambda u_1 + u_2)$

## 5.9 Opérations avec des applications linéaires



Je ne le fais pas pas parce que je vais faire la troisième chose. Donc, (3). Maintenant, je me donne trois espaces vectoriels. Soient  $U, V$  et  $W$  des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, et  $T$  une application linéaire de  $U$  dans  $V$ , et  $S$  une application linéaire de  $V$  dans  $W$ . Dans la vidéo 5.0, nous avons défini ce qu'est la composition d'applications. Donc, on a cette composition. Donc, celle que je fais en premier c'est  $T$  qui envoie  $U$  dans  $V$  et puis  $S$  qui vient après envoyer  $V$  dans  $W$ . Donc, ça part de  $U$ , et ça arrive dans  $W$ . On a la composition, c'est une application. Et puis, ce que je veux montrer, c'est que c'est une application linéaire. On montre que c'est une application composition d'une application  $\mathbb{R}$ -linéaire. Alors, je me donne des vecteurs et un scalaire. Donc, soient  $u_1$  et  $u_2$  des vecteurs dans  $U$  et  $\lambda$  un scalaire. Alors, je fais  $S$  composée avec  $T$  appliquée à  $\lambda u_1 + u_2$ . Par définition de la composition, ceci est égal à  $S$  appliquée à  $T$  appliquée à  $\lambda u_1 + u_2$ .

Notes

Summary



Soient  $T, S$  des applications linéaires de  $V$  dans  $W$  (des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels). Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On définit :

(1)  $\lambda T : V \rightarrow W, (\lambda T)(v) = \lambda \cdot T(v)$

(2)  $T + S : V \rightarrow W, (T + S)(v) = T(v) + S(v)$

Exercice: Vérifier que  $\lambda T$  et  $T + S$  sont des applications  $\mathbb{R}$ -linéaires de  $V$  dans  $W$ .

(3) Soient  $U, V, W$  des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et  $T: U \rightarrow V$  et  $S: V \rightarrow W$ , des applications  $\mathbb{R}$ -linéaires. On a la composition  $S \circ T : U \rightarrow W$ . On montre que  $S \circ T$  est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire.

Soient  $u_1, u_2 \in U$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $(S \circ T)(\lambda u_1 + u_2) = S(T(\lambda u_1 + u_2))$

$$\begin{aligned} &= S(\lambda T(u_1) + T(u_2)) \\ &\stackrel{\text{(linéarité de } T\text{)}}{=} \lambda S(T(u_1)) + S(T(u_2)) \stackrel{\text{(linéarité de } S\text{)}}{=} \lambda (S \circ T)(u_1) + (S \circ T)(u_2) \end{aligned}$$

Donc  $S \circ T$  est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire.

## 5.9 Opérations avec des applications linéaires



Maintenant, comme  $T$  est linéaire, donc, ici, c'est égal, et, ça, c'est linéarité de  $T$ . Ceci est égal à  $S$  appliquée à  $\lambda T$  de  $u_1 + T$  de  $u_2$ . Et maintenant, par linéarité de  $S$ , ceci est égal à  $\lambda S$  de  $T(u_1) + S$  de  $T(u_2)$ . Et, par définition de la composition, ceci est égal à  $\lambda S$  composée avec  $T$  appliquée à  $u_1 + S$  composée avec  $T$  appliquée à  $u_2$ . Donc, on a cette application, là. On l'applique à une combinaison linéaire de deux vecteurs, et puis, c'est la même chose que si on fait la combinaison linéaire des images. Donc  $S$  composée avec  $T$  est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire. Faisons des exemples.

Notes

Summary



**Exemple.** Soient  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la symétrie orthogonale par rapport au plan  $(xy)$ ,  
 $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la projection orthogonale sur le plan  $(xy)$ , et  
 $\pi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la projection orthogonale sur le plan  $(yz)$ .

$$S((x, y, z)) = (x, y, -z)$$

$$\pi_1((x, y, z)) = (x, y, 0)$$

$$\pi_2((x, y, z)) = (0, y, z)$$

$$(S + \pi_1)((x, y, z)) = (x, y, -z) + (x, y, 0) = (2x, 2y, -z).$$

$$(S \circ \pi_1)((x, y, z)) =$$

h

## 5.9 Opérations avec des applications linéaires



Je commence avec  $S$  qui est la symétrie orthogonale par rapport au plan  $(xy)$ .  $\pi_1$  qui est la projection orthogonale sur le plan  $(xy)$ .  $\pi_2$  qui est la projection orthogonale sur le plan  $(yz)$ . Donc, déjà j'écris les formules pour ces applications. Donc,  $S$  d'un vecteur  $(x, y, z)$  est égale, donc, je fais la symétrie orthogonale par rapport au plan  $(xy)$ , donc, les vecteurs, ils sont renvoyés comme ça, donc, ceci sera : le vecteur  $(x, y, -z)$ . Et puis, ensuite,  $\pi_1$  appliquée à un vecteur  $(x, y, z)$ . C'est la projection orthogonale sur le plan  $(xy)$ . Donc, j'écrase la partie  $z$ . Donc, j'ai  $(x, y, 0)$ . Et  $\pi_2$  c'est la projection sur le plan  $(yz)$  Donc, c'est  $(0, y, z)$ . Donc, voilà les formules. Et puis maintenant, en faisant ces opérations avec ces applications, si je fais  $S + \pi_1$  appliqué à  $(x, y, z)$ . C'est juste le résultat de faire  $S$  + le résultat de l'application  $\pi_1$  et je les mets ensemble. Du coup, j'ai :  $(2x, 2y, -z)$ . Ou sinon, si je fais  $S$  composée avec  $\pi_1$  de  $(x, y, z)$ . Ceci est  $S$  appliquée à  $(x, y, 0)$  qui est  $(x, y, 0)$ .

Notes

Summary



5m 00s

**Exemple.** Soient  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la symétrie orthogonale par rapport au plan  $(xy)$ ,  
 $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la projection orthogonale sur le plan  $(xy)$ , et  
 $\pi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la projection orthogonale sur le plan  $(yz)$ .

h

$$S((x, y, z)) = (x, y, -z)$$

$$\pi_1((x, y, z)) = (x, y, 0)$$

$$\pi_2((x, y, z)) = (0, y, z)$$

$$(S + \pi_1)((x, y, z)) = (x, y, -z) + (x, y, 0) = (2x, 2y, -z).$$

$$(S \circ \pi_1)((x, y, z)) = S((x, y, 0)) = (x, y, 0)$$

$$(\pi_1 \circ S)((x, y, z)) = \pi_1((x, y, -z)) = (x, y, 0)$$

$$(\pi_1 \circ \pi_2)((x, y, z)) = \pi_1((0, y, z)) = (0, y, 0)$$

## 5.9 Opérations avec des applications linéaires



Si je fais dans l'autre sens, qu'est ce qu'il se passe ?  $\pi_1$  composée avec  $S$  appliquée à  $(x, y, 0)$ . C'est  $\pi_1$  appliquée à  $(x, y, -z)$  qui est égale à  $(x, y, 0)$ . Donc, en fait, c'est pareil. Ça se peut que ça ne soit pas pareil mais, ici, c'est pareil. Et si je fais d'autres choses, par exemple si je fais  $\pi_1$  composée avec  $\pi_2$  appliquée à  $(x, y, z)$ . Donc, ça c'est  $\pi_1$  appliquée à  $(0, y, z)$  qui est égal à  $(0, y, 0)$ . Ça veut dire que je projette d'abord sur le plan  $(yz)$ . Et ensuite, je projette sur le plan  $(xy)$ , et ça fait une projection sur l'axe des  $y$ . Et puis, dans l'autre sens c'est pareil. Maintenant, passons à un autre exemple.

Notes

Summary





**Exemple.** Soient  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la symétrie orthogonale par rapport au vecteur  $\vec{v} = (1, 1)$ ,  
 $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la projection orthogonale sur l'axe des abscisses.

$$S((x, y)) = (y, x)$$

$$\pi((x, y)) = (x, 0)$$

$$(S \circ \pi)((x, y)) = S((x, 0)) = (0, x)$$

$$(\pi \circ S)((x, y)) = \pi((y, x)) = (y, 0)$$



## 5.9 Opérations avec des applications linéaires



Je me donne cette fois une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Je ferai la symétrie orthogonale par rapport au vecteur  $(1, 1)$ . C'est un exemple vu dans le paragraphe sur les applications géométriques. Et puis, la projection orthogonale sur l'axe des abscisses, sur l'axe des  $x$ . Donc je donne les formules.  $S$  appliquée à  $(x, y)$  c'est juste  $(y, x)$ . Vous pouvez vérifier avec la formule, mais, ici c'est assez clair. Parce que si je fixe le vecteur  $(1, 1)$  et puis je fais une symétrie orthogonale, c'est clair que ça renvoie ici. Après ça échange des coordonnées. Et puis,  $\pi$  de  $(x, y)$  c'est la projection sur l'axe des  $x$ . Donc ça c'est  $(x, 0)$ . Donc, faisons des combinaisons ici, des compositions, ou bien des sommes. Si je fais  $S$  composée avec  $\pi$ , appliqué à  $(x, y)$ . Ceci est  $S$  appliquée à  $(x, 0)$  qui est égal à  $(0, x)$ . Sinon, si je fais  $\pi$  composée avec  $S$ , appliqué à  $(x, y)$ . Ça, c'est  $\pi$  appliqué à  $(y, 0)$  qui est égal à  $(y, 0)$ . Donc, c'est pas égal cette fois. Donc, cette fois, faire la symétrie et ensuite la projection ce n'est pas la même chose que de faire la projection et puis la symétrie.

Notes

Summary



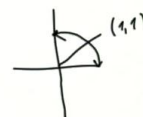
7m 49s



**Exemple.** Soient  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la symétrie orthogonale par rapport au vecteur  $\vec{v} = (1, 1)$ ,  
 $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la projection orthogonale sur l'axe des abscisses.

$$S((x, y)) = (y, x)$$

$$\pi((x, y)) = (x, 0)$$



$$(S \circ \pi)((x, y)) = S((x, 0)) = (0, x)$$

$$(\pi \circ S)((x, y)) = \pi((y, x)) = (y, 0)$$

$$(2S + \pi)((x, y)) = 2S((x, y)) + \pi((x, y)) = 2(y, x) + (x, 0) = (2y + x, 2x)$$

#### 5.9 Opérations avec des applications linéaires



Ce qui se voit géométriquement. Enfin si je fais  $2S + \pi$  appliqué à  $(x, y)$ . Ça c'est  $2S$  appliqué à  $(x, y) + \pi$  appliqué à  $(x, y)$ . Donc,  $2S$  appliqué à  $(x, y)$ , c'est 2 fois le résultat de faire  $S$ . Donc, ça, c'est  $(y, x) + \pi$  appliqué à  $(x, y)$ , c'est  $(x, 0)$  et du coup, j'ai  $2y + x$  et  $2x$ . Étant donné les applications linéaires, on peut les combiner ou bien faire la somme ou bien multiplier par un scalaire ou bien les compositions de ces applications. Et puis, il reste la question : Est-ce que les applications linéaires ont une application inverse lorsqu'elles sont bijectives ? C'est la question que je traite dans la prochaine vidéo.

Notes

Summary

