



5.10 Applications inversibles



Je termine le chapitre 5 avec un paragraphe sur les opérations, sur les applications linéaires. Dans la vidéo précédente, nous avons vu que l'on peut prendre deux applications linéaires et les additionner, ou bien les multiplier par un scalaire ou encore les composer et cela donne de nouvelles applications linéaires. Cette fois je vais parler de l'inverse d'une application linéaire.

Notes

Summary



0m 03s

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire bijective de \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W . Alors il existe une application $S : W \rightarrow V$ t.q. $T \circ S = \text{id}_W$ et $S \circ T = \text{id}_V$.

On montre ^{1^{re}} S est une application \mathbb{R} -linéaire. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $w_1, w_2 \in W$.

T surjective \Rightarrow il existe $v_1, v_2 \in V$ tels que $T(v_1) = w_1$ et $T(v_2) = w_2$.

5.10 Applications inversibles



Pour que l'application inverse existe, c'est quelque chose qu'on a vu dans le paragraphe 5.0, dans l'introduction à ce chapitre, il faut que l'application soit bijective. Je commence avec une application linéaire bijective d'un espace V vers un espace W . On sait qu'il existe au moins une application de W dans V tel que les deux compositions sont l'identité sur l'espace approprié. Donc si je fais d'abord S et ensuite T , ça fait l'identité sur W mais si je fais d'abord T et ensuite S ça fait l'identité sur V . Pour le moment cette application est seulement une application. J'aimerais vous convaincre que cette application est une application linéaire. Donc on montre que S est une application \mathbb{R} -linéaire. Pour faire cela, je prends un scalaire et deux vecteurs dans W . T est une application surjective parce qu'elle est bijective donc T est surjective et cela implique qu'il existe v_1 et v_2 dans V tels que $T(v_1) = w_1$ et $T(v_2) = w_2$. Maintenant, je considère $S(\alpha w_1 + w_2) = S(\alpha T(v_1) + T(v_2))$.

Notes

Summary



Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire bijective de \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W . Alors il existe une application $S : W \rightarrow V$ t.q. $T \circ S = \text{id}_W$ et $S \circ T = \text{id}_V$.

On montre ^{1st} S est une application \mathbb{R} -linéaire. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $w_1, w_2 \in W$.

T surjective \Rightarrow il existe $v_1, v_2 \in V$ tels que $T(v_1) = w_1$ et $T(v_2) = w_2$.

$$\begin{aligned} \text{Considérons } S(\alpha w_1 + w_2) &= S(\alpha T(v_1) + T(v_2)) = S(T(\alpha v_1 + v_2)) = \alpha v_1 + v_2 = \alpha S T(v_1) + S T(v_2) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad T \text{ linéaire} \\ &= \alpha S(w_1) + S(w_2). \end{aligned}$$

Donc S est une application \mathbb{R} -linéaire.

— Si $T : V \rightarrow W$ est une application linéaire bijective, on dit que T est une application inversible. On appelle S (comme ci-dessus) l'inverse de T , et on écrit $S = T^{-1}$.



5.10 Applications inversibles



Ceci est égal à... J'utilise maintenant le fait que T est une application linéaire, j'obtiens ... $= S(T(\alpha v_1 + v_2))$. Comme je sais que T suivie par S donne l'identité, ceci est égal à $\alpha v_1 + v_2$. Et ceci est égal à $\alpha S T(v_1) + S T(v_2)$. car S composée avec T c'est l'identité donc au lieu d'avoir ceci j'ai cela et finalement, c'est égal à $\alpha S(w_1) + S(w_2)$. Donc je commence avec une combinaison linéaire ici à l'intérieur, et c'est le même résultat que d'avoir une combinaison linéaire ici des images. Cela implique que S est une application linéaire. C'est la fin de ce que je voulais montrer. On dit à ce moment-là : Si T de V dans W est une application bijective, on dit que T est inversible et on appelle l'application S l'inverse de T . Et au lieu d'écrire S on va écrire quelque chose qui est en lien avec T et on écrit $S = T^{-1}$. Donc voilà une nouvelle notation. Cette partie-là est une notation et une définition.

Notes

Summary



2m 10s

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire bijective de \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W . Alors il existe une application $S : W \rightarrow V$ t.q. $T \circ S = \text{id}_W$ et $S \circ T = \text{id}_V$.

On montre ^{1st} S est une application \mathbb{R} -linéaire. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $w_1, w_2 \in W$.

T surjective \Rightarrow il existe $v_1, v_2 \in V$ tels que $T(v_1) = w_1$ et $T(v_2) = w_2$.

$$\begin{aligned} \text{Considérons } S(\alpha w_1 + w_2) &= S(\alpha T(v_1) + T(v_2)) = S(T(\alpha v_1 + v_2)) = \alpha v_1 + v_2 = \alpha S T(v_1) + S T(v_2) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad T \text{ linéaire} \\ &= \alpha S(w_1) + S(w_2). \end{aligned}$$

Donc S est une application \mathbb{R} -linéaire.

— Si $T : V \rightarrow W$ est une application linéaire bijective, on dit que T est une application inversible. On appelle S (comme ci-dessus) l'inverse de T , et on écrit $S = T^{-1}$.

5.10 Applications inversibles



Si j'ai une application linéaire bijective, on a montré que son inverse, l'application qui va dans l'autre sens, est aussi une application linéaire et donc j'ai l'inverse de l'application qui est une application linéaire et je lui donne cette notation-là. Ceci conclut le chapitre 5, un chapitre très important. Dans le prochain chapitre, on va faire un lien entre les matrices, quelque chose que nous avons déjà étudié et ces applications linéaires.

Notes

Summary



4m 05s