



6.1 La représentation matricielle d'une application

Dans ce chapitre, nous allons faire un lien entre les applications linéaires et les méthodes matricielles. Et puis on a déjà eu deux chapitres, un chapitre sur les matrices, un chapitre sur les applications linéaires. Dans ce chapitre on met tout ça ensemble, et ça fait de très jolies méthodes pour résoudre des problèmes dans les espaces vectoriels, en utilisant ce que l'on a appris sur les matrices. Et puis, la première chose à faire, c'est de prendre une application linéaire et associer à cette application une matrice. Donc, je vous explique comment faire ça.

Notes

Summary



0m 04s

Soient V et W des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. Soit $T: V \rightarrow W$ une application \mathbb{R} -linéaire. Fixons des bases ordonnées B_V et B_W de V et W respectivement. On associe à T une matrice $[T]_{B_W B_V}$ comme suit:

$$B_V = (v_1, \dots, v_n)$$



6.1 La représentation matricielle d'une application linéaire



Maintenant, je vais tout écrire car j'aimerais que ça se déroule lentement. Alors, je me donne deux espaces vectoriels de dimensions finies. C'est un truc qui ne marche que dans les espaces de dimensions finies. Donc soient... V et W des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimensions finies. Je prends une application linéaire de V dans W . Alors maintenant comme je l'ai dit je voulais que ce soit dimension finie, car je vais fixer des bases. Donc fixons des bases ordonnées. B_V et B_W de V et W respectivement. Et puis avec ces bases fixées, on associe à T une matrice, et cette matrice a une notation un peu compliquée, je mets ici T et pour indiquer les deux bases, je mets B_V parce qu'elle part de V et ensuite B_W , parce qu'elle arrive dans W . On associe à T une matrice comme suit. C'est une procédure. J'explique la procédure et ensuite, je fais deux exemples. Donc pour expliquer la procédure, je dois fixer les bases, donc B_V disons que c'est v_1, \dots, v_n . Donc c'est un espace de dimension n .

Notes

Summary



0m 36s

Soient V et W des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. Soit $T: V \rightarrow W$ une application \mathbb{R} -linéaire. Fixons des bases ordonnées B_V et B_W de V et W respectivement. On associe à T une matrice $[T]_{B_W B_V}$ comme suit:

$$B_V = (v_1, \dots, v_n)$$

$$B_W = (w_1, \dots, w_m)$$

$$T(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \dots + a_{mi}w_m \quad \text{pour } a_{ij} \in \mathbb{R}. \quad \text{Dnc } [T(v_i)]_{B_W} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

La i -



6.1 La représentation matricielle d'une application linéaire



Et B_W , c'est w_1, \dots, w_m . Alors, je vais appliquer T à v_i et comme B_W est une base je sais que je peux l'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de la base B_W , donc je le fais. Donc j'ai $a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \dots + a_{mi}w_m$ pour certains a_{ij} . Comme c'est une base, je sais que ces coefficients sont uniquement déterminés par le vecteur $T(v_i)$. Et puis je pose... Donc on a une autre façon d'écrire ça, c'est de dire que si je prends $T(v_i)$ et j'écris le vecteur colonne qui le représente par rapport à la base B_W , c'est la colonne $a_{1i} a_{2i}$ jusqu'à a_{mi} . Et puis cette colonne-là, je vais la poser dans une matrice et puis je vais la poser dans la i -ème colonne de la matrice. La i -ème colonne de la matrice que je suis en train de former de la matrice T par rapport aux bases B_V et B_W est égale à cette colonne-là: $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}$. Donc ça c'est la procédure. Donc cette matrice, elle aura combien de colonnes ?

Notes

Summary



2m 26s

Soient V et W des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $T: V \rightarrow W$ une application \mathbb{R} -linéaire. Fixons des bases ordonnées B_V et B_W de V et W respectivement. On associe à T une matrice $[T]_{B_W B_V}$ comme suit:

$$B_V = (v_1, \dots, v_n)$$

$$B_W = (w_1, \dots, w_m)$$

$$T(v_i) = a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \dots + a_{im}w_m \quad \text{pour } a_{ij} \in \mathbb{R}. \quad \text{Dnc } [T(v_i)]_{B_W} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{im} \end{pmatrix}$$

La i -ème colonne de la matrice $[T]_{B_W B_V}$ est égale à $\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{im} \end{pmatrix}$.

$[T]_{B_W B_V}$ a n colonnes, une pour chaque v_i .

" a m lignes.

$[T]_{B_W B_V}$ s'appelle la matrice de T par rapport aux bases B_V et B_W .



6.1 La représentation matricielle d'une application linéaire

Il y a une colonne pour chaque v_i . Donc la matrice $[T]_{B_W B_V}$ a n colonnes, une pour chaque v_i . Et comme ces colonnes sont de longueur m , elle a m lignes. Et puis, cette matrice a m lignes. Cette matrice qu'on forme s'appelle la matrice de T par rapport aux bases B_V et B_W . Donc cette matrice T s'appelle. Donc je souligne ici : la matrice de T par rapport aux bases B_V et B_W . Vous verrez dans les exemples que ça dépend fortement des bases choisies. Si j'ai une seule application linéaire et je fixe une autre paire de bases, alors je vais construire une autre matrice. Ce ne sera pas la même matrice. Il faut toujours bien dire quelles sont les bases, et c'est pour ça que la notation a ses deux bases indiquées.

Notes

Summary



Exemple 1. Soit $T : \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $T(p) = p'$. Prenons \mathcal{C} la base $(1, x, x^2, x^3, x^4)$ de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ et \mathcal{B} la base $(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

Cherchons $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$

$$T(1) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



6.1 La représentation matricielle d'une application linéaire



Commençons par l'exemple un. Je me donne l'application linéaire des polynômes de degrés au plus quatre dans les polynômes de degrés au plus trois, qui donne la dérivé du polynôme. Je fixe les bases que nous préférons d'habitude. \mathcal{C} qui est la base de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ et \mathcal{B} la base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Maintenant, je vais former la matrice de T par rapport à ces deux bases. Donc cherchons la matrice de T par rapport aux bases \mathcal{C} \mathcal{B} . Dans ce sens-là. Vous verrez après pourquoi j'ai décidé de les mettre dans ce sens-là. Dans la plupart des livres, on le met dans ce sens, aussi des fois, il y a d'autres notations, mais ici je reste avec cette notation. Donc quelle était la procédure? C'est que je dois appliquer T à chacun des vecteurs dans la première base. Et puis je dois écrire la colonne qui correspond à cette image, par rapport à cette base-là. Et ça, va donner la colonne dans la matrice. Donc je le fais. Donc si je fais T appliqué à 1, ça me donne 0. Et puis, ça c'est représenté par la colonne 0, 0, 0, 0. Si je fais $T(x)$, ceci est égal à 1, par rapport à cette base-là, ça c'est représenté par la colonne 1, 0, 0, 0.

Notes

Summary



5m 25s

Exemple 1. Soient $T : \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $T(p) = p'$, $\mathcal{B}_1 = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$ et $\mathcal{B}_2 = (x^3, x^2, x, 1)$. et \mathcal{B} la base $(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

Cherchons $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.

$$T(1) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x) = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = 2x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x^3) = 3x^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x^4) = 4x^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



6.1 La représentation matricielle d'une application linéaire

$T(x^2)$ c'est $2x$. Ça c'est représenté, par rapport à cette base, par la colonne 0, 2, 0, 0. $T(x^3)$ c'est $3x^2$ qui est représenté, par rapport à cette base, par la colonne 0, 0, 3, 0. Et enfin $T(x^4)$ c'est $4x^3$. Et ça c'est représenté par la colonne 0, 0, 0, 4. Et puis la matrice de T , par rapport à ces deux bases, est la matrice où je pose ces colonnes successivement dans la matrice. Donc j'ai la première colonne, la deuxième, troisième, quatrième, et puis cinquième. Maintenant, je vais faire un deuxième exemple.

Notes

Summary



Exemple 2. Soient $T : \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $T(p) = p'$, $\mathcal{B}_1 = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$ et $\mathcal{B}_2 = (x^3, x^2, x, 1)$.

Cherchons $[T]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}$.

$$[T(x^4)]_{\mathcal{B}_2} = [4x^3]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(x^3)]_{\mathcal{B}_2} =$$

6.1 La représentation matricielle d'une application linéaire



Alors je prends la même application linéaire. Donc j'ai l'application linéaire qui part des polynômes de degrés au plus quatre, qui arrive dans les polynômes de degrés au plus trois, et c'est "prend la dérivée". Donc c'est la même application. Mais je fixe deux bases différentes. Et puis ça va surement changer le résultat de l'exercice. Donc cette fois je dis : cherchons la matrice de T par rapport à ces deux bases-là. La base \mathcal{B}_1 vers la base \mathcal{B}_2 . Alors je fais le même exercice. Je connais déjà les résultats. Cette fois, je souligne vraiment. Donc si je fais T appliqué à... Je dois commencer ici. Je fais T appliqué à x^4 , et je la représente par rapport à la deuxième base. Donc c'est par rapport à \mathcal{B}_2 . Ceci est égal à la représentation, comme vecteur colonne, de $4x^3$ par rapport à la base \mathcal{B}_2 . Comme x^3 est le premier élément de cette base, ça va donner 4, 0, 0, 0. Maintenant je fais $T(x^3)$, c'est le deuxième élément de cette base, que je représente par rapport à la base \mathcal{B}_2 . Donc ça c'est $3x^2$ représenté par rapport à la base \mathcal{B}_2 .

Notes

Summary



Exemple 2. Soient $T : \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $T(p) = p'$, $B_1 = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$ et $B_2 = (x^3, x^2, x, 1)$.

Cherchons $[T]_{B_2, B_1}$.

$$[T(x^4)]_{B_2} = [4x^3]_{B_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(x^3)]_{B_2} = [3x^2]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(x^2)]_{B_2} = [2x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(x)]_{B_2} = [1]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T(1)]_{B_2} = [0]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B_2, B_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.1 La représentation matricielle d'une application linéaire



Et ça c'est quelle colonne ? Alors $3x^2$ ça donne la coordonnée 3 là. Donc j'ai 0, 3, 0, 0. Alors je continue. $T(x^2)$ représenté par rapport à la base B_2 , c'est $2x$ représenté par rapport à la base B_2 . Et puis je regarde cette base, ça va être 0, 0, 2, 0. Je reprends là-haut. Je fais $T(x)$ représenté par rapport à la base B_2 , ça c'est 1 représenté par rapport à la base B_2 . Et puis ça c'est la colonne 0, 0, 0, 1. Et puis enfin $T(1)$, représenté par rapport à la base B_2 , ça c'est juste le vecteur nul, qui est de toute façon la colonne nulle. Donc cette fois, on a une autre matrice. Donc la représentation matricielle de T par rapport aux bases B_1, B_2 . C'est une matrice de la même taille parce que c'est déterminé par les dimensions des espaces, mais les colonnes sont différentes. Donc la première colonne, c'est l'image du premier vecteur, la deuxième, la troisième, la quatrième et ensuite la dernière. Donc maintenant, si vous retournez en arrière, vous verrez que ce n'est pas la même matrice que nous avons eue avant.

Notes

Summary



Exemple 2. Soient $T : \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $T(p) = p'$, $\mathcal{B}_1 = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$ et $\mathcal{B}_2 = (x^3, x^2, x, 1)$.

Cherchons $[T]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}$.

$$[T(x^4)]_{\mathcal{B}_2} = [4x^3]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(x^3)]_{\mathcal{B}_2} = [3x^2]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(x^2)]_{\mathcal{B}_2} = [2x]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = [1]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T(1)]_{\mathcal{B}_2} = [0]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



6.1 La représentation matricielle d'une application linéaire

Déjà dans l'autre, cette colonne des zéros était en premier. Donc ça dépend vraiment des bases choisies. Donc ça c'est la fin de l'introduction. On continue car on va développer des propriétés et voir comment utiliser cette représentation matricielle pour simplifier le travail avec les applications linéaires.

Notes

Summary



10m 56s