





## 6.2 La représentation matricielle d'une application linéaire, pr

J'ai introduit la représentation matricielle d'une application linéaire mais pour le moment, on ne voit pas pourquoi c'est intéressant. Donc ici, je vais montrer la première propriété que possède cette matrice et ensuite c'est cette propriété-là qui va nous permettre de travailler avec la matrice au lieu de l'application linéaire. C'est une preuve un peu pénible à démontrer car elle comporte beaucoup d'indices. Je la ferai donc en détails et ensuite, dans la vidéo suivante, je donnerai des exemples.

Notes

Summary



0m 04s

**Proposition.** Soient  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base finie  $\mathcal{B}_V$  et  $W$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base finie  $\mathcal{B}_W$ . Soient  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire et  $v \in V$ . Alors

$$[T(v)]_{\mathcal{B}_W} = [T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} [v]_{\mathcal{B}_V}.$$

Preuve :



## 6.2 La représentation matricielle d'une application linéaire, premières propriétés

La proposition que je veux démontrer est la suivante : je me donne deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie et je fixe des bases. C'est une habitude à développer car pour faire cette représentation matricielle, il faut bien fixer des bases et il faut dire quelles sont ces bases qu'on a fixées. Maintenant, je me donne une application linéaire et un vecteur  $v$  dans  $V$ . Donc la propriété qui est donnée ici, il y a deux façons de voir la chose : ou bien je peux envoyer le vecteur à droite, donc j'envoie de  $V$  dans  $W$ , par l'application  $T$  et après je peux la représenter par un vecteur colonne, donc ça c'est un vecteur colonne qui a quelle taille ? bon cela a la dimension de  $W$ . Sinon, je peux former la matrice de l'application par rapport à ces deux bases, ensuite je peux multiplier cette matrice par la représentation comme vecteur colonne du vecteur  $v$ . Ici, c'est une multiplication de matrices et la proposition dit que ces deux choses donnent le même résultat. Déjà, je vais parler des dimensions ici, donc je commence la preuve... On va déjà vérifier que tout cela a un sens. Donc fixons des bases.

Notes

Summary



0m 36s

**Proposition.** Soient  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base finie  $\mathcal{B}_V$  et  $W$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base finie  $\mathcal{B}_W$ . Soient  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire et  $v \in V$ . Alors

$$[T(v)]_{\mathcal{B}_W} = [T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} [v]_{\mathcal{B}_V}.$$

$m \times 1$                        $m \times n$                        $n \times 1$

Preuve: Soient  $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$  et  $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$  pour  $v_i \in V, w_j \in W$ .  
 (dnc  $\dim V = n$  et  $\dim W = m$ )



## 6.2 La représentation matricielle d'une application linéaire, premières propriétés

Soit  $\mathcal{B}_V$  la base  $v_1, \dots, v_n$  et  $\mathcal{B}_W$  la base  $w_1, \dots, w_m$ . Donc pour des vecteurs  $v_i$  dans  $V$  et  $w_j$  dans  $W$ . Voilà j'ai fixé mes bases. Ici, je veux regarder en passant les dimensions, i.e. les tailles des matrices. La dimension de  $V$  est  $n$  et la dimension de  $W$  est  $m$ . Juste pour vérifier que tout est en ordre, regardons l'égalité de la proposition. A gauche, nous avons un vecteur-colonne de quelle longueur ? C'est la dimension de  $W$  (i.e.  $m$ ), donc c'est un vecteur-colonne qui est de taille  $m \times 1$ . L'élément  $[v]_{\mathcal{B}_W}$ , c'est un vecteur-colonne qui a la longueur de la dimension de  $V$ , donc c'est un vecteur-colonne qui est de taille  $n \times 1$ . Ensuite, la matrice que nous avons a quelle taille ? Je vous rappelle comment on forme cette matrice : pour chaque vecteur dans la première base, on forme une colonne. Ainsi je sais qu'elle a  $n$  colonnes. Les longueurs de ces colonnes sont  $m$ . Donc cette égalité à un sens, en tout cas au niveau des dimensions.

Notes

Summary



1m 57s

**Proposition.** Soient  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base finie  $\mathcal{B}_V$  et  $W$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base finie  $\mathcal{B}_W$ . Soient  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire et  $v \in V$ . Alors

$$[T(v)]_{\mathcal{B}_W} = [T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} [v]_{\mathcal{B}_V}.$$

Preuve: Soient  $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$  et  $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$  pour  $v_i \in V, w_j \in W$ .

(donc  $\dim V = n$  et  $\dim W = m$ ). Posons  $[T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} = A$ .  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

On écrit  $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ .

$$[v]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j \right) \end{aligned}$$

## 6.2 La représentation matricielle d'une application linéaire, premières propriétés



En effet, on multiplie la matrice de l'application par un vecteur-colonne, donc c'est bien défini et cela donne lieu à un vecteur colonne de taille  $m \times 1$ . Donc cela a un sens. Maintenant, posons que la matrice de l'application  $T$  est  $A$ . Alors  $A = (a_{ij})$  est une matrice de taille  $m \times n$  sur  $\mathbb{R}$ . Maintenant je vais travailler avec  $A$  plutôt qu'avec la notation précédente. Et je me donne un vecteur  $v$  dans  $V$ . On écrit  $v$  en termes de la première base, disons que  $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ , donc cela signifie que le  $[v]_{\mathcal{B}_V}$  est exactement la colonne remplie des  $\lambda_i$ .

Maintenant j'applique  $T$  au vecteur  $v$ . Comme  $T$  est une application linéaire, je sais que je peux décomposer donc j'ai  $T(v) = T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \dots + \lambda_n T(v_n)$ . Maintenant, j'utilise la définition de la matrice d'une application linéaire. Ici, j'ai l'égalité  $T(v) = \sum \lambda_i T(v_i)$ , avec  $i$  qui va de 1 à  $n$ , puis j'utilise la définition de la matrice  $A$ . Donc  $T(v_i)$  c'était quoi ? Je descends la  $i$ -ème colonne de la matrice, donc j'ai  $T(v) = \sum \lambda_i (a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + \dots$

Notes

Summary



**Proposition.** Soient  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base finie  $\mathcal{B}_V$  et  $W$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base finie  $\mathcal{B}_W$ . Soient  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire et  $v \in V$ . Alors

$$[T(v)]_{\mathcal{B}_W} = [T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} [v]_{\mathcal{B}_V}.$$

Preuve: Soient  $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$  et  $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$  pour  $v_i \in V, w_j \in W$ .

(donc  $\dim V = n$  et  $\dim W = m$ ). Posons  $[T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} = A$ .  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

On écrit  $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ .

$$[v]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad T(v) = T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_{i1} w_1 + a_{i2} w_2 + \dots + a_{im} w_m)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j \right) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ji} \right) w_j.$$

## 6.2 La représentation matricielle d'une application linéaire, premières propriétés



+  $a_{mi} w_m$ , maintenant j'écris ça de manière plus courte. [voir écran] C'est une expression compliquée, donc la preuve sera un peu complexe à cause de ces indices. Maintenant, comme il s'agit de sommes finies dans notre cas, j'ai les règles de distributivité. Je peux donc échanger l'ordre des deux sommes et j'obtiens : [voir écran] On peut tout développer et ensuite tout remettre ensemble d'une manière différente parce que ce sont des sommes finies et que dans les nombres réels, la multiplication distribue sur l'addition. Maintenant je reprends notre formule dans le prochain slide.

Notes

Summary



**Rappel.**  $T(v) = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ji}) w_j$

Donc le coefficient de  $w_j$  dans l'expression de  $T(v)$  en termes de la base  $B_W$  est

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ji}$$

$$\Rightarrow [T(v)]_{B_W} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{1i} \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{mi} \end{pmatrix} \quad A \text{ comparer avec } [T]_{B_W B_V} \cdot [v]_{B_V}$$

$$A \cdot [v]_{B_V}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ & & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

On constate que  $[T(v)]_{B_W} = A \cdot [v]_{B_V}$   
 $= [T]_{B_W B_V} [v]_{B_V}$



## 6.2 La représentation matricielle d'une application linéaire, premières propriétés

L'expression que nous avons signifié que le coefficient de  $w_j$  dans l'expression de  $T(v)$  est exactement le coefficient  $\sum \lambda_i a_{ji}$ . Donc, le coefficient de  $w_j$  dans l'expression de  $T(v)$  en termes de la base  $B_W$  est  $\sum \lambda_i a_{ji}$ . Donc de ce résultat, on déduit que si j'écris le vecteur colonne pour  $T(v)$  par rapport à la base  $B_W$ , c'est exactement la colonne : (c'est un peu compliqué) [voir écran] Ceci est l'expression pour  $T(v)$  en termes de la base  $B_W$ . Donc j'étais censée comparer cela avec le produit de matrices précédent : [voir écran] Donc j'écris plus précisément :  $A = (a_{ij})$  : [voir écran], qui multiplie le vecteur-colonne  $v$  qui est composé de  $\lambda_i$ . Maintenant, je veux comparer les deux expressions. Si je fais la multiplication des deux matrices à droite, la première composante du résultat sera  $a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1n}\lambda_n$ . C'est exactement l'expression que j'ai à gauche. Donc, on constate que la colonne à gauche est exactement la même chose que la multiplication de matrices qui est la matrice qui représente  $T \times$  le vecteur colonne qui représente  $v$ . Donc ça c'est ce que je voulais montrer. Dans la vidéo suivante, nous travaillerons des exemples.

Notes

Summary

