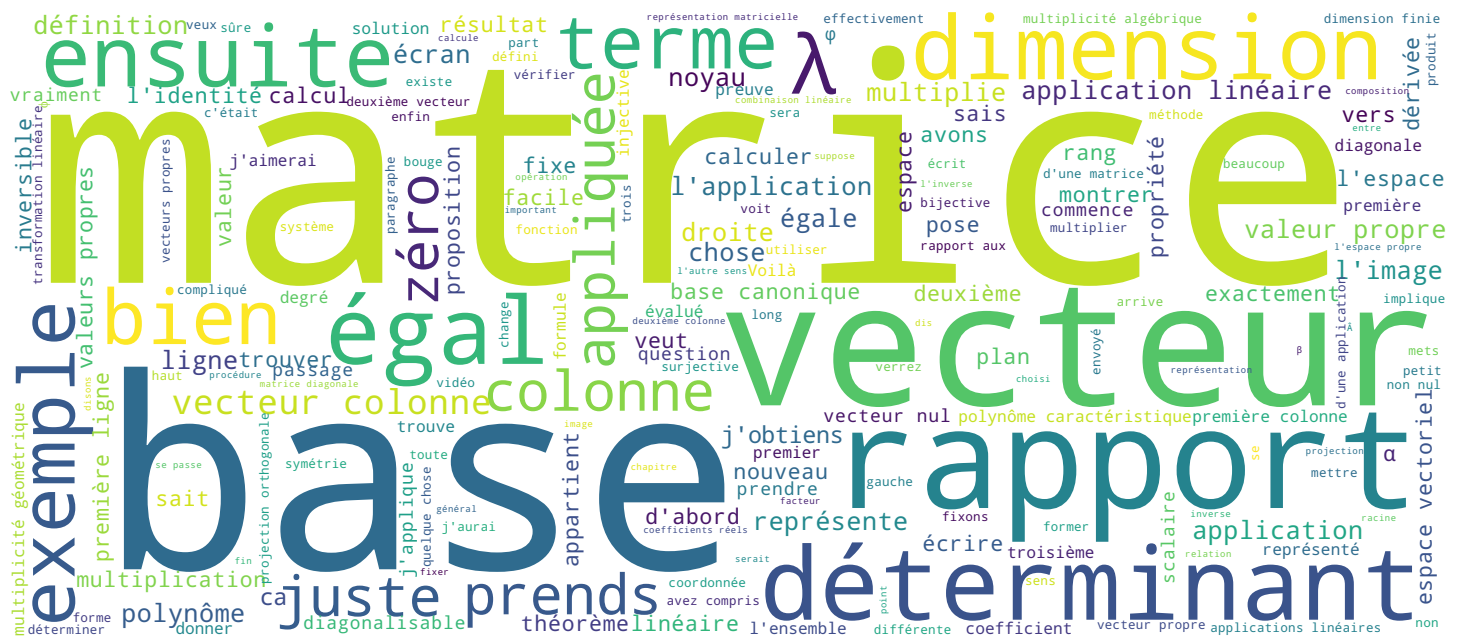
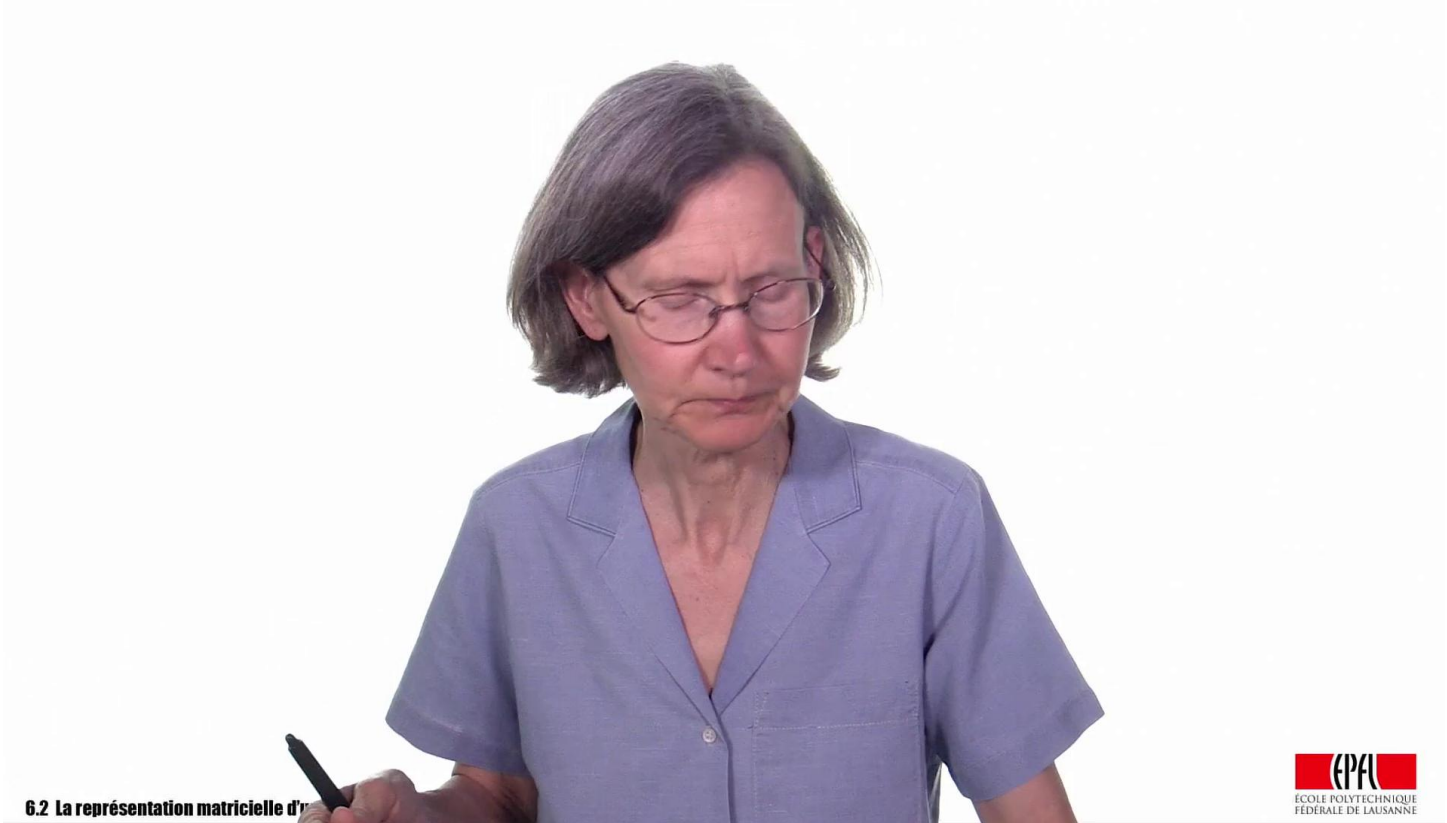


6.2 La représentation matricielle d'une application, premières propriétés (suite)

Prof. Donna Testerman





6.2 La représentation matricielle d'

Au début de ce paragraphe, j'ai montré une propriété très importante : on peut former la matrice d'une application linéaire, et cette matrice a la propriété suivante : si je la multiplie par un vecteur colonne qui représente un vecteur dans V alors ça donne un vecteur colonne qui représente l'image du vecteur original par l'application linéaire par rapport à la base dans le deuxième espace. Là j'ai juste démontré la propriété, mais ici j'aimerais faire trois exemples où je mets ça en évidence dans chacun. Donc on a vu beaucoup d'exemples d'applications linéaires. Je commence par deux exemples géométriques, et ensuite un exemple quelconque.

Notes

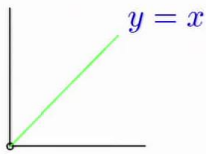
Summary



0m 04s

Exemples.

(1) Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur la droite $y = x$.



Fixons la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ de \mathbb{R}^2 . $e_1 = (1, 0)$
 $e_2 = (0, 1)$.

On forme la matrice $[T]_{ee}$:

$$T((1, 0)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$T((0, 1)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$[T]_{ee} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



6.2 La représentation matricielle d'une application, premières propriétés (suite)

Je reprends l'exemple d'une projection orthogonale, sur une droite dans le plan. Je fixe ici une base pour \mathbb{R}^2 , donc fixons la base canonique. Je dis Je rappelle : $e_1 = (1 \ 0)$ et $e_2 = (0 \ 1)$. Et comme j'ai le même espace ici à gauche et à droite, je peux utiliser cette même base pour l'espace V et l'espace W . Alors, maintenant, pour former la matrice qui est la représentation matricielle de T par rapport à la base \mathcal{C} , deux fois, on forme ça. Pour faire ça je dois faire T appliquée au vecteur $(1 \ 0)$, et si vous allez revoir la vidéo pour le paragraphe 5.2 vous verrez, la formule, et puis ça donne $(1/2 \ 1/2)$ Et si on applique au vecteur $(0 \ 1)$, donc le deuxième vecteur de la base ça donne aussi $(1/2 \ 1/2)$. Et donc la matrice de T par rapport à la base \mathcal{C} deux fois, ce sera la matrice : Ici, si je représente ça en termes de la base habituelle, ceci représenté par rapport à cette base, c'est juste le vecteur colonne parce qu'on a choisi la base canonique, et ici la même chose. Voilà c'est la matrice qui représente cette application par rapport à la base canonique à gauche et à droite.

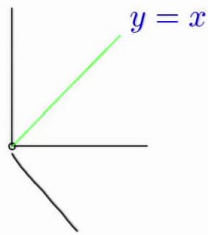
Notes

Summary



Exemples.

(1) Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur la droite $y = x$.



Fixons la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ de \mathbb{R}^2 . $e_1 = (1, 0)$
 $e_2 = (0, 1)$.

On forme la matrice $[T]_{ee}$:

$$T((1, 0)) = (1/2, 1/2)$$

$$T((0, 1)) = (1/2, 1/2)$$

$$[T]_{ee} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T((1, 1)) = ?$$

$$T((1, 1)) = (1, 1) \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$T((1, -1))$$

6.2 La représentation matricielle d'une application, premières propriétés (suite)



Et maintenant, pour vous convaincre de cette propriété que je vous ai montrée, je vais prendre un autre vecteur. Donc, regardons, par exemple, T appliquée au vecteur $(1 \ 1)$. Le vecteur $(1 \ 1)$ appartient à cette droite-là (i.e. la droite d'équation $x=y$). donc si on fait la projection orthogonale sur la droite d'un vecteur qui appartient à la droite, ça ne bouge pas. Donc, $T(1 \ 1)$ est égal à $(1 \ 1)$. Et si je prends cette matrice-là, et je multiplie par le vecteur colonne qui représente $(1 \ 1)$ qui est juste [voir écran] alors j'obtiens alors [voir écran] le vecteur colonne $(1 \ 1)$, qui est effectivement le résultat. Ca c'est correct. Maintenant, quel autre vecteur serait convenable pour cette application ? Là j'ai pris un vecteur qui est dans la droite, je fais la projection. je pourrais aussi prendre un vecteur dans une droite perpendiculaire, là. Donc, si je prends par exemple le vecteur $(1 \ -1)$ qui est un vecteur orthogonal à la droite. Que se passe-t-il si j'ai un vecteur orthogonal à cette droite? Quand je fais la projection orthogonale, je devrais tomber sur le vecteur nul. On va voir. $T((1 \ -1))$ devrait être le vecteur nul.

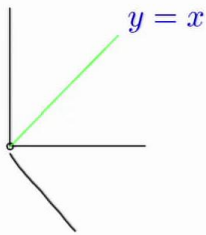
Notes

Summary



Exemples.

(1) Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur la droite $y = x$.



Fixons la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ de \mathbb{R}^2 . $e_1 = (1, 0)$
 $e_2 = (0, 1)$.

On forme la matrice $[T]_{ee}$:

$$T((1, 0)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$T((0, 1)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$[T]_{ee} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T((1, 1)) = ?$$

$$T((1, 1)) = (1, 1) \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$T((1, -1)) = \underline{(0, 0)}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$



6.2 La représentation matricielle d'une application, premières propriétés (suite)

Faisons la multiplication : Donc ça c'est la matrice qui représente T Je multiplie par le vecteur colonne qui représente ce vecteur-là. Par rapport à la base canonique, c'est juste cette colonne-là. Je fais la multiplication de matrices et j'obtiens le vecteur colonne associé à $(0 \ 0)$. Donc, de nouveau, ceci correspond à ça. Ça, c'est exactement ce que dit cette proposition.

Notes

Summary



(2) Soit $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $z = 0$

Fixons une base B de \mathbb{R}^3 , $B = (e_1, e_2, e_3)$.

$$S(e_1) = S((1, 0, 0)) = (1, 0, 0)$$

$$S(e_2) = S((0, 1, 0)) = (0, 1, 0)$$

$$S(e_3) = S((0, 0, 1)) = (0, 0, -1)$$



6.2 La représentation matricielle d'une application, premières propriétés (suite)



Je fais un deuxième exemple géométrique. Cette fois je prends la symétrie orthogonale de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 , par rapport au plan $z=0$. Donc ça c'est graphiquement, je prends un point ici et je l'inverse en bas, ou bien le contraire. Maintenant je fixe de nouveau une base, en fixant une base il faut toujours une base B de \mathbb{R}^3 , disons que je prends pour B de nouveau la base canonique. Et comme c'est une application géométrique je vois très bien ce que fait S , Donc S appliquée à e_1 , c'est S appliquée au vecteur $(1 \ 0 \ 0)$ et ça c'est un vecteur qui appartient au plan $z=0$, donc quand je fais la symétrie ça ne bouge pas, donc ça c'est $(1 \ 0 \ 0)$. Si je fais S appliquée à e_2 , comme e_2 est aussi un vecteur qui appartient au plan de symétrie, donc ça ne bouge pas non plus. Et S appliquée à c'est ce vecteur-là qui est basculé en bas symétriquement, donc j'obtiens $(0 \ 0 \ -1)$. Donc, si je représente S par rapport à cette base, dans le premier et aussi dans le deuxième espace, j'obtiens [voir écran] Maintenant, appliquons S à un vecteur quelconque.

Notes

Summary



4m 57s

(2) Soit $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $z = 0$

Fixons une base B de \mathbb{R}^3 , $B = (e_1, e_2, e_3)$.

$$S(e_1) = S((1, 0, 0)) = (1, 0, 0)$$

$$S(e_2) = S((0, 1, 0)) = (0, 1, 0)$$

$$S(e_3) = S((0, 0, 1)) = (0, 0, -1)$$

$$[S]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S((x, y, z)) = \underline{(x, y, -z)} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \underline{-z} \end{pmatrix}$$



6.2 La représentation matricielle d'une application, premières propriétés (suite)



Donc S appliquée à (x, y, z) , c'est $(x, y, -z)$. Et si je prends cette matrice, et je multiplie par le vecteur, qui représente ce vecteur par rapport à la base B , ça donne le vecteur colonne $(x \ y \ z)^T$. donc je multiplie et ça donne [voir écran]. Donc effectivement, le résultat ici est représenté par ce vecteur-là par rapport à la base B que nous avons fixée.

Notes

Summary



(3) Soit $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(f) = (f(0), f(1) + f'(1))$.

On admet que T est une application \mathbb{R} -linéaire.



6.2 La représentation matricielle d'une application, premières propriétés (suite)



Troisième exemple : là je fais vraiment un cas plus général, un exemple qui a plus de contenu. Je commence avec les polynômes de degrés au plus 2, à coefficients réels, et je vais vers \mathbb{R}^2 . Et l'application donne ceci: elle prend le polynôme et pour première coordonnée ça donne sa valeur en zéro, la deuxième coordonnée, sa valeur en 1, plus la valeur de la dérivée en 1. On va admettre que T est linéaire. Pour nous compliquer la vie un petit peu, pour être sûre que vous avez compris ce qui se passe ici, je vais fixer deux bases, et peut-être pas les bases canoniques. Donc, fixons les bases B_1 et B_2 , de la façon suivante : Ici, pour être sûre que vous avez compris je vais fixer une autre base un peu différente, donc je vais mettre $(x^2, x, 1)$ Et puis ensuite, la base B_2 , fixons $B_2 = ((0, 2), (-1, 0))$ Vous verrez que, quand on a choisi des bases, surtout B_2 , qui ne sont pas des bases canoniques, la procédure pour écrire la matrice de T par rapport aux deux bases est plus compliquée.

Notes

Summary



7m 19s

(3) Soit $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(f) = (f(0), f(1) + f'(1))$.

On admet que T est une application \mathbb{R} -linéaire.

Fixons B_1 la base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $B_1 = (x^2, x, 1)$.

Fixons B_2 la base de \mathbb{R}^2 , $B_2 = ((0, 2), (-1, 0))$

Cherchons la matrice $[T]_{B_2 B_1}$.

$$T(x^2) = (0, 1+2) = (0, 3)$$

$$T(x) = (0, 1+1) = (0, 2)$$

$$T(1) = (1, 1) = (1, 1)$$



6.2 La représentation matricielle d'une application, premières propriétés (suite)



Mais je fais un exemple un peu plus compliqué, pour être sûr que vous avez compris la procédure. Cherchons la matrice T par rapport à ces bases, et ensuite je vais vérifier la propriété montrée avec la multiplication. Donc, cherchons la matrice. Je fais T appliquée à x^2 , c'est : J'évalue x^2 en zéro, ça donne zéro. J'évalue x^2 en 1, ça donne 1, et j'ajoute la dérivée de x^2 évaluée en 1, c'est 2. donc ça ça donne $(0, 3)$ Maintenant j'applique T au deuxième vecteur de la base donc x évalué en zéro c'est zéro x évalué en 1, c'est 1 et la dérivée de x c'est 1. Donc ça c'est $(0, 2)$. Et ensuite, j'applique T au troisième vecteur de la base Donc, 1 évalué en zéro c'est 1. 1 évalué en 1, c'est 1 et la dérivée c'est nul. Donc ça c'est $(1, 1)$ Pour écrire la matrice de l'application je devrais écrire ces vecteurs-là, ces images, en termes de cette base-là. Donc $(0, 3)$, en termes de la base B_2 , c'est juste $3/2(0, 2) + 0(-1, 0)$.

Notes

Summary



9m 05s

(3) Soit $T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(f) = (f(0), f(1) + f'(1))$.

On admet que T est une application \mathbb{R} -linéaire.

Fixons B_1 la base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $B_1 = (x^2, x, 1)$.

Fixons B_2 la base de \mathbb{R}^2 , $B_2 = ((0, 2), (-1, 0))$

Cherchons la matrice $[T]_{B_2 B_1}$.

$$T(x^2) = (0, 1+2) = (0, 3)$$

$$T(x) = (0, 1+1) = (0, 2)$$

$$T(1) = (1, 1) = (1, 1)$$

$$(0, 3) = \frac{3}{2}(0, 2) + 0 \cdot (-1, 0)$$

$$[(0, 2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1, 1) = \frac{1}{2}(0, 2) - (-1, 0)$$

$$[(0, 3)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[(1, 1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B_2 B_1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(a+bx+cx^2) = (a, a+b+c + b+2c)$$



6.2 La représentation matricielle d'une application, premières propriétés (suite)

et donc $(0, 3)$ en termes de la base B_2 , c'est le vecteur colonne $(3/2 \ 0)^T$
 Le vecteur $(0 \ 2)^T$ en termes de la base B_2 c'est facile car on l'a carrément donc là c'est $(1 \ 0)^T$ et puis $(1 \ 1)^T$, je l'écris en termes de la base B_2 , c'est un demi fois le premier vecteur moins le deuxième vecteur et donc, on obtient $(1/2 \ -1)^T$ donc la matrice de T , cette fois c'est un peu compliqué par rapport aux bases B_1 et B_2 , c'est la matrice il y a trois colonnes, deux lignes Donc la première colonne c'est [voir écran] la deuxième colonne c'est... [voir écran] Maintenant j'applique T à un vecteur quelconque Donc T appliquée à $a+bx+cx^2$, c'est égal à : j'applique la règle là-haut est égal à, donc je substitue zéro, ça me donne a . Je substitue 1, ça me donne $a+b+c$. Je fais la dérivée, puis je substitue 1 et ça me donne $a+b+2c$. Donc le résultat c'est $(a, a+b+2c)$ Ensuite, je multiplie la matrice, donc je prends celle que j'avais, ici mais je dois multiplier cette matrice par le vecteur colonne qui représente ce vecteur-là par rapport à cette base.

Notes

Summary



(3) Soit $T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(f) = (f(0), f(1) + f'(1))$.

On admet que T est une application \mathbb{R} -linéaire.

Fixons B_1 la base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $B_1 = (x^2, x, 1)$.

Fixons B_2 la base de \mathbb{R}^2 , $B_2 = ((0, 2), (-1, 0))$

Cherchons la matrice $[T]_{B_2 B_1}$.

$$T(x^2) = (0, 1+2) = (0, 3)$$

$$T(x) = (0, 1+1) = (0, 2)$$

$$T(1) = (1, 1) = (1, 1)$$

$$(0, 3) = \frac{3}{2}(0, 2) + 0 \cdot (-1, 0) \quad [(0, 3)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[(0, 2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1, 1) = \frac{1}{2}(0, 2) - (-1, 0) \quad [(1, 1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B_2 B_1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(a+bx+cx^2) = (a, a+b+c + b+2c) = (a, a+2b+3c)$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 c + b + 1/2 a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 c + b + 1/2 a \\ -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 c + b + 1/2 a \\ 0 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+2b+3c \end{pmatrix}$$

6.2 La représentation matricielle d'une application, premières propriétés (suite)



Donc du coup, par rapport à cette base-là les coefficients sont dans l'autre sens. Donc je multiplie et j'obtiens le vecteur : Donc là j'ai $3/2c + b + 1/2a$ et ici j'ai $-a$. Ceci est censé représenter l'image par T , mais par rapport à cette base B_2 . Ici si je fais [voir écran] Qu'est-ce que je trouve ? Je trouve le vecteur [voir écran] Donc c'est très bien. J'obtiens exactement ce que j'ai obtenu là-haut. C'est donc un exemple plus conséquent, pour montrer que même si on change les bases et on choisit des bases un peu bizarres, pas canoniques, on forme cette matrice. Elle fait ce que disait la proposition. C'est la multiplication de matrices qui donne le résultat, mais il faut interpréter celui-ci en termes de la deuxième base.

Notes

Summary



12m 50s