



6.3 Une bijection entre l'ensemble des applications linéaires

Jusqu'à maintenant, on a pris une application linéaire entre des espaces vectoriels de dimensions finies. Nous avons fixé des bases qui nous ont permis d'écrire une matrice pour cette application linéaire. Ce que nous n'avons pas du tout établi ce sont de bonnes propriétés de cette association. Bon, on en a établi une bonne. C'est cette histoire de multiplier par la matrice l'application. Mais maintenant j'aimerais faire un lien très étroit entre les matrices et les applications linéaires. Je vais donner une bijection entre ces deux ensembles. Elle aura aussi de bonnes propriétés.

Notes

Summary



0m 04s

Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel avec base finie $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$ et W un \mathbb{R} -espace vectoriel avec base finie $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$. Posons

$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ application linéaire}\}$. (l'ensemble des applications linéaires de V dans W)

On a défini l'addition et multiplication par des scalaires sur $\mathcal{L}(V, W)$. (vidéo 5.9).

On peut vérifier que $\mathcal{L}(V, W)$, avec ces deux opérations, est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

L'élément nul, le vecteur nul, dans $\mathcal{L}(V, W)$ est l'application qui envoie tout $v \in V$ vers 0_W .



6.3 Une bijection entre l'ensemble des applications linéaires et les matrices



Je fixe deux " \mathbb{R} -espace vectoriel", de dimension finie, et je fixe des bases. C'est ce qu'on fait toujours au début. Puis j'introduis une notation, j'écris " \mathcal{L} " de (V, W) , d'être l'ensemble des applications linéaires de " V " dans " W ". Donc c'est l'ensemble. Je le souligne ici entre parenthèses. Nous avons déjà défini sur cet ensemble une addition et une multiplication par un scalaire. sur cet ensemble, Donc si on a deux applications linéaires de " V " dans " W ", on sait les additionner et on sait multiplier par un scalaire. Ça c'était dans la vidéo 5-9. Alors, avec ces deux opérations, on peut vérifier que cet ensemble-là devient un \mathbb{R} -espace vectoriel Je ne fais pas la vérification mais ce serait un bon exercice si vous voulez le faire. Donc on peut vérifier Comme c'est utile de le savoir, je mentionne que l'application qui agit comme élément neutre c'est juste l'application nulle. Donc l'élément nul, c'est-à-dire le vecteur nul, dans cet espace, est l'application qui envoie tout vecteur de " V " au vecteur nul dans " W ". Donc c'est l'application nulle. vers le vecteur nul dans " W ". Bon, ça c'est juste une parenthèse.

Notes

Summary



Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel avec base finie $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$ et W un \mathbb{R} -espace vectoriel avec base finie $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$. Posons

$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ application linéaire}\}$. (l'ensemble des applications linéaires de V dans W)

On a défini l'addition et multiplication par des scalaires sur $\mathcal{L}(V, W)$. (vidéo S.9).

On peut vérifier que $\mathcal{L}(V, W)$, avec ces deux opérations, est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

(L'élément nul, le vecteur nul, dans $\mathcal{L}(V, W)$ est l'application qui envoie tout $v \in V$ vers 0_W .)

On définit $\Theta : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$ par

$$\Theta(T) = [T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}.$$

Proposition Θ est une application linéaire bijective.



6.3 Une bijection entre l'ensemble des applications linéaires et les matrices

Maintenant, je vais définir une application qui part de cet " \mathbb{R} -espace vectoriel" et qui arrive dans les matrices. On définit un grand " Θ " et qui arrive dans les matrices. On définit un grand " Θ " qui part des applications linéaires et qui arrive dans des matrices. Ce sont des matrices " $m \times n$ " à coefficient réel. Et on a déjà une association donc vous ne serez pas étonné de voir quelle est la définition. On définit ça par " Θ " d'une application c'est juste la matrice de l'application par rapport à ces deux bases que nous avons fixées. Alors, on peut montrer. Donc proposition: Avec toute cette notation, mise en place là, Alors " Θ " est une application linéaire bijective. Donc ça ça signifie beaucoup de choses: Si je fais une combinaison linéaire d'applications, c'est comme faire la combinaison linéaire des matrices, associées. Et bijective signifie que cet espace-là aura par exemple la même dimension que celui-ci, que le seul vecteur qui est en application, envoyé vers la matrice nulle, c'est l'application nulle. Etc. Je vais démontrer une partie. Pas tout. Car après je veux plutôt l'utiliser.

Notes

Summary



Preuve partielle:

On admet que Θ est \mathbb{R} -linéaire.

On montre la bijectivité.

$$\begin{aligned} \Theta \text{ Injectif: } \ker(\Theta) &= \{T: V \rightarrow W \mid [T]_{B_W B_V} = 0\} \\ &= \{T: V \rightarrow W \mid T(v_i) = 0 \text{ pour tout } i\} = \{T: V \rightarrow W \mid T(v) = 0\} = \text{l'application nulle} \\ &= \text{l'élément neutre de } \mathcal{L}(V, W). \end{aligned}$$

6.3 Une bijection entre l'ensemble des applications linéaires et les matrices



Bon, on admet Je laisse comme exercice, la linéarité On admet est linéaire. je vais montrer la bijectivité. En passant je fais une remarque là-dessus: vous aurez envie d'utiliser le théorème du rang, sûrement, Mais on ne peut pas bien l'utiliser car on ne connaît pas la dimension de cet espace " L " de " (V, W) ". Là on ne peut pas utiliser le théorème du rang, on doit vraiment montrer que l'application est injective et que l'application est surjective. Donc d'abord on montre injective. Donc, là je peux utiliser le noyau. Donc, le noyau de Θ sont toutes les applications linéaires telles que " T ", telle que je la représente par rapport aux base " B_V, B_W " ça donne la matrice nulle. Cela veut donc dire que le noyau c'est tous les " T " de " V " dans " W " tels que, ça veut dire que quand je l'applique en " v_i " la colonne qui résulte c'est " 0 ", pour tout " i ". Et ça c'est l'application qui envoie tout " v " à " 0 ". C'est l'application nulle. qui est effectivement le " 0 " de notre espace vectoriel " L " de " (V, W) ", l'élément. Donc comme le noyau est trivial, ça implique que " Θ " est injective.

Notes

Summary



Preuve partielle:

On admet que Θ est \mathbb{R} -linéaire.

On montre la bijectivité.

Θ Injectif: $\ker(\Theta) = \{T: V \rightarrow W \mid [T]_{B_W B_V} = 0\}$
 $= \{T: V \rightarrow W \mid T(v_i) = 0 \text{ pour tout } i\} = \{T: V \rightarrow W \mid T(v) = 0\} = \text{l'application nulle}$
 $= \text{l'élément neutre de } \mathcal{L}(V, W).$

Donc Θ est injective.

Θ surjective: Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$. On définit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire

par $T(v_i) = a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \dots + a_{in}w_n$, et ensuite on étend par linéarité.

On a $[T]_{B_W B_V} = A$ et donc $\Theta(T) = A$ et Θ est surjective. \square



6.3 Une bijection entre l'ensemble des applications linéaires et les matrices

Maintenant, surjectivité. Donc là je me donne une matrice, à droite, "A" une matrice, dont les coefficients sont "a" et "j". Puis je vais définir une application. Or, on sait qu'avec les applications linéaires il suffit de dire où cette application envoie chaque élément d'une base et après on étend par linéarité et on comprend où on a la définition de l'application. Je vais juste dire ce que "T" fait à chaque "v_i". Par "T" de "v_i" est égal à jusqu'à Et ensuite on étend par linéarité. On a déjà dit que c'est possible. Et puis, j'ai fait exprès que, ayant donné cette définition-là, on a que la matrice de "T", par rapport aux deux bases fixées, est exactement la matrice "A", car regardez ce que je mettrais dans la i-ième colonne de cette matrice je mettrais la i-ième colonne de "A". Et donc "Teta" de cette application-là est exactement la matrice "A" et est surjective. Donc on a une bijection, une application linéaire inversible. des applications linéaires de "V" dans "W" vers les matrices "n x n". Donc ça c'est la preuve. Des conséquences de ça, bon il y a quelques petites conséquences, et ensuite autre chose qu'il faut montrer.

Notes

Summary



Preuve partielle:

On admet que Θ est \mathbb{R} -linéaire.

On montre la bijectivité.

Θ Injectif: $\ker(\Theta) = \{T: V \rightarrow W \mid [T]_{B_W B_V} = 0\}$
 $= \{T: V \rightarrow W \mid T(v_i) = 0 \text{ pour tout } i\} = \{T: V \rightarrow W \mid T(v) = 0\} =$ l'application nulle
 $=$ l'élément neutre de $\mathcal{L}(V, W)$.

Donc Θ est injective.

Θ surjective: Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$. On définit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire

par $T(v_i) = a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \dots + a_{in}w_n$, et ensuite on étend par linéarité.

On a $[T]_{B_W B_V} = A$ et donc $\Theta(T) = A$ et Θ est surjective. \square

Conséquences (1) $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = \dim(M_{m \times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$

(2) On résout de nombreuses questions sur des applications linéaires par des méthodes matricielles.

6.3 Une bijection entre l'ensemble des applications linéaires et les matrices



Des conséquences directes et faciles : c'est que maintenant on a la dimension de cet espace vectoriel c'est la même chose que la dimension de l'espace des matrices et ça on sait Voilà une chose qu'on ne connaissait pas avant. Donc c'est un espace vectoriel de dimension finie et sa dimension c'est " $m \times n$ ". La deuxième conséquence, c'est que beaucoup de nos questions, sur les applications, peuvent être résolues par des manipulations de matrices. Maintenant, si vous réfléchissez un peu vous vous demanderez : avec les applications linéaires, on a vu comment les additionner comment multiplier par un scalaire, mais on sait aussi qu'on peut des fois composer les applications linéaires si ça part de " u " et " v " et ensuite " v " dans " w " on peut les composer. Et puis, on se demande quand même s'il y a un lien entre cette composition et une opération qu'on fera avec des matrices associées à ces applications. C'est une question très naturelle. Je ne vais pas répondre tout de suite car il faut préparer le terrain. Donc maintenant je démontre quelque chose qui a l'air inutile, mais vous verrez dans la vidéo d'après que c'est très utile pour répondre à cette question : que devient la composition d'application par rapport à cette association avec les matrices?

Notes

Summary



Proposition. Soient $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et supposons que $AX = BX$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$. Alors $A = B$.

6.3 Une bijection entre l'ensemble des applications linéaires et les matrices

Voilà la proposition que j'aimerais montrer. Don je me donne deux matrices " $m \times n$ " à coefficient réel et je suppose que quand je multiplie " A " x " X " ça donne toujours la même chose que quand je multiplie " B " x " X " pour toute matrice " $m \times n$ ", donc en fait pour tout vecteur colonne on peut déduire que " A " est égal à " B ". On pourrait déduire cela en utilisant vraiment la multiplication de matrice. Ca serait pénible car on aura des plein de " i " et de coordonnées à gérer, mais ici je vais utiliser cette bijection, c'est un corollaire de ce qu'on vient de montrer avec la bijection. Donc je donne la preuve.

Notes

Summary



11m 08s

Proposition. Soient $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et supposons que $AX = BX$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$. Alors $A = B$.

Preuve On utilisera la bijection $\Theta : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$, correspondant au choix de bases e_1, e_2 , les bases canoniques de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ respectivement.

Par la surjectivité de Θ , il existe $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ t.q. $\Theta(T) = A$
et $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ t.q. $\Theta(S) = B$.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$.

$$(T(v))_{e_2} = [T]_{e_2 e_1} \cdot [v]_{e_1} = A[v]_{e_1}$$

6.3 Une bijection entre l'ensemble des applications linéaires et les matrices



Donc ça c'est un espace vectoriel de dimension " n ", un espace vectoriel de dimension " m ", et on sait que ça donne une bijection, une application linéaire bijective, entre cet espace d'application linéaire et l'espace d'une matrice, et on utilisera cette bijection-là correspondant au choix de base. Donc je me donne, ici, des applications linéaires qui représentent ces deux matrices et une autre application linéaire telle que. Donc j'ai deux matrices ici " A " et " B " comme cette application-là est surjective je sais qu'il existe un " T ", un " S " même unique, comme elle est bijective tel que " T " envoie " T " sur " A " et " S " sur " B ". Maintenant, soit si je fais et je l'écris par rapport à la base " e_2 ", ceci c'est la même chose que le vecteur " v " écrit par rapport à la base " e_1 ", donc ça c'était la propriété essentielle. Et ceci est égal à " A " multiplié par ce vecteur-là, écrit par rapport à la base " e_1 ". Si je fais " S " appliqué à ce vecteur " v ", je l'écris par rapport à la base " e_2 ". Le même raisonnement ceci est égal à la matrice de " S " par rapport à ces deux bases qui multiplie le vecteur " v " par rapport à la base " e_1 ".

Notes

Summary



12m 13s

Proposition. Soient $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et supposons que $AX = BX$ pour tout $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$. Alors $A = B$.

Preuve On utilisera la bijection $\Theta : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$, correspondant au choix de bases e_1, e_2, \dots , les bases canoniques de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ respectivement.

Par la surjectivité de Θ , il existe $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ t.q. $\Theta(T) = A$
et $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ t.q. $\Theta(S) = B$.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$.

$$[T(v)]_{e_2} = [T]_{e_2 e_1} \cdot [v]_{e_1} = A[v]_{e_1}$$

Par hypothèse $A[v]_{e_1} = B[v]_{e_1}$

Donc

$$[S(v)]_{e_2} = [S]_{e_2 e_1} \cdot [v]_{e_1} = B[v]_{e_1}$$

6.3 Une bijection entre l'ensemble des applications linéaires et les matrices



Et ça c'est "B" qui multiplie ce même vecteur. Et maintenant par hypothèse l'hypothèse ici c'est que "A" x un vecteur colonne c'est la même chose que "B" x un vecteur colonne. Donc, par hypothèse, "A" x ce vecteur colonne est égal à "B" x ce vecteur colonne. Et donc ça veut dire que "T" de "v" est égal à "S" de "v" pour tout "v". Et on déduit que "T" est égal à "S" en tant qu'application et donc, Maintenant on utilisera ce résultat pour répondre à la question : que devient la composition de l'application par rapport à cette association avec les matrices?

Notes

Summary



14m 49s