



Nous venons d'établir une bijection entre l'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel vers un autre, et puis les matrices. C'est quand les deux espaces vectoriels sont de dimension finie. Et puis maintenant, j'aimerais voir ce que devient la composition d'applications, par rapport à cette bijection.

[illegible]



Summary



Théorème. Soient U, V, W trois \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. Fixons des bases $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$, respectivement. Soient $T : U \rightarrow V$ et $S : V \rightarrow W$ des applications linéaires. Alors $[S \circ T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_U} = [S]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} \cdot [T]_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_U}$.



6.4 La composition d'applications linéaires



Et puis, nous avons le théorème suivant : Alors je commence avec trois \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie U, V et W . Et je fixe des bases $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V$ et \mathcal{B}_W de chacun de ces espaces. Je me donne deux applications linéaires. La première, T qui part de U et qui arrive dans V . Et S qui part de V et qui arrive dans W . Puis je veux savoir quelle est la relation, ou s'il y a une relation, entre les matrices que je peux former ici. Donc je peux former la matrice de S par rapport à ces deux bases [voir écran], la matrice de T par rapport à ces deux bases [voir écran], et puis, je peux aussi faire la composition dans ce sens là, de S et T , et puis, après écrire une matrice. Heureusement la relation, c'est ce qu'on aimerait, c'est que la composition devient la multiplication. D'ailleurs, c'est pour ça que nous avons défini la multiplication de matrices comme c'est défini. Alors je vais démontrer ce théorème. La démonstration, ce n'est pas difficile car on a déjà montré le point essentiel.

Notes

Summary



0m 23s

Théorème. Soient U, V, W trois \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. Fixons des bases $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$, respectivement. Soient $T : U \rightarrow V$ et $S : V \rightarrow W$ des applications linéaires. Alors $[S \circ T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_U} = [S]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} \cdot [T]_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_U}$.

Preuve : Posons $A = [T]_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_U}$, $C = [S]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$ et $D = [S \circ T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_U}$. Soit $u \in U$,
 posons $X = [u]_{\mathcal{B}_U}$.

$$[(S \circ T)(u)]_{\mathcal{B}_W} = [S \circ T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_U} \cdot [u]_{\mathcal{B}_U} = D \cdot X$$



6.4 La composition d'applications linéaires



Donc pour avoir un peu moins de notations, posons: A , la matrice de T par rapport à ces deux bases, C , la matrice de S par rapport à ces deux bases, et D la matrice de la composition. Et aussi, je prends un vecteur u dans U quelconque. Et je pose X , le vecteur colonne qui représente u par rapport à la base \mathcal{B}_U . Alors je fais deux choses du côté de cette égalité-là on commence avec S composée avec T , appliquée à u . Et puis, comme l'image ça serait un vecteur qui est dans W , je l'écris par rapport à la base \mathcal{B}_W . Puis, par une autre relation essentielle, c'est que quand on fait l'application linéaire appliquée à un vecteur qu'on sait que c'est la même chose que si on prend la matrice de l'application Et on multiplie par le vecteur colonne, qui représente u . Et puis, donc en utilisant la notation qu'on a fixé, ça c'est DX . Et puis maintenant je prends une autre façon de faire ça. Donc j'ai S composé avec T appliquée à u , représenté par rapport à la base \mathcal{B}_W .

Notes

Summary



1m 28s

Théorème. Soient U, V, W trois \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. Fixons des bases $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$, respectivement. Soient $T : U \rightarrow V$ et $S : V \rightarrow W$ des applications linéaires. Alors $[S \circ T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_U} = [S]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} \cdot [T]_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_U}$.

Preuve : Posons $A = [T]_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_U}$, $C = [S]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$ et $D = [S \circ T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_U}$. Soit $u \in U$,
 posons $X = [u]_{\mathcal{B}_U}$.

$$[(S \circ T)(u)]_{\mathcal{B}_W} = [S \circ T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_U} \cdot [u]_{\mathcal{B}_U} = D \cdot X$$

$$\parallel [(S \circ T)(u)]_{\mathcal{B}_W} = [S(T(u))]_{\mathcal{B}_W} = [S]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} \cdot [T(u)]_{\mathcal{B}_V} = [S]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} \cdot [T]_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_U} \cdot [u]_{\mathcal{B}_U} = C \cdot A \cdot X$$
 On a $DX = CAX$ pour tout X

6.4 La composition d'applications linéaires



Et puis, ceci est égal à S , qui est appliquée à T , qui est appliquée à u , par définition de la composition des deux applications. Et puis maintenant, j'utilise le même fait, mais seulement avec l'application linéaire de S . Donc ça c'est la matrice de S par rapport à ces deux bases, qui multiplie la matrice de $T(u)$, par rapport à la base \mathcal{B}_V , car T envoie U dans l'espace V . Et puis maintenant, je réutilise la même composition. Donc j'ai la matrice de $(S)_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$ fois la matrice $(T)_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_V}$, qui multiplie le vecteur colonne qui représente u par rapport à la base \mathcal{B}_U . Alors en termes des notations qu'on a fixé, la matrice de S , c'est le C . La matrice de T c'est le A , la matrice de u c'est le X . Et puis par définition, ces deux choses-là sont égales. Donc on a que DX est égale à CAX et ça c'est pour tout X , dans les matrices de taille $\dim(U) \times 1$. Et donc par une proposition que nous avons vue, ça implique que le D est égal à CA .

Notes

Summary



3m 24s

Théorème. Soient U, V, W trois \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. Fixons des bases B_U, B_V, B_W , respectivement. Soient $T : U \rightarrow V$ et $S : V \rightarrow W$ des applications linéaires. Alors $[S \circ T]_{B_W B_U} = [S]_{B_W B_V} \cdot [T]_{B_V B_U}$.

Preuve : Posons $A = [T]_{B_V B_U}$, $C = [S]_{B_W B_V}$ et $D = [S \circ T]_{B_W B_U}$. Soit $u \in U$,

posons $X = [u]_{B_U}$.

$$[(S \circ T)(u)]_{B_W} = [S \circ T]_{B_W B_U} \cdot [u]_{B_U} = D \cdot X$$

$$\parallel [(S \circ T)(u)]_{B_W} = [S(T(u))]_{B_W} = [S]_{B_W B_V} \cdot [T(u)]_{B_V} = [S]_{B_W B_V} \cdot [T]_{B_V B_U} \cdot [u]_{B_U} = C \cdot A \cdot X$$

On a $DX = CAX$ pour tout X .

$\Rightarrow D = C \cdot A$

$$[S \circ T]_{B_W B_U} = [S]_{B_W B_V} \cdot [T]_{B_V B_U} \quad \square$$



6.4 La composition d'applications linéaires

Et le D c'est exactement le terme du côté gauche, ici. Ça c'est le S composé de T représenté par rapport à C de base là. C'est-à-dire que $D = [S \circ T]_{B_W B_U}$. Idem, $C = [S]_{B_W B_V}$. Et puis le A c'est le $[T]_{B_V B_U}$. Très bien, ça c'est la démonstration. Maintenant, appliquons ça à un exemple juste pour voir en pratique qu'est ce que ça donne.

Notes

Summary



5m 10s

Exemple. Soit $R_\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la rotation dans le plan (xy) , d'angle θ autour de l'axe de rotation z . Fixons la base canonique \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 . Alors $[R_\theta]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (voir exercices).

Soit $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la symétrie orthogonale par rapport au plan (xz) . Alors

$$S(a, b, c) = (a, -b, c). \quad \text{On a} \quad [S]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.4 La composition d'applications linéaires



Je considère un exemple dans \mathbb{R}^3 . Je prends la rotation dans le plan (xy) , d'angle θ autour de l'axe de rotation z . Alors je fixe la base canonique de \mathbb{R}^3 , et puis, vous avez déjà vu dans les exercices, que si je fais la matrice de la rotation par rapport à cette base, ça donne cette matrice-là. Et puis maintenant je prends S , la symétrie orthogonale par rapport au plan (xz) , où précisément ça fixe le plan (xz) et ça envoie -ça fait une symétrie orthogonale- donc ça renverse l'axe des y de l'autre côté. Alors la matrice de S par rapport à la base \mathcal{C} , deux fois, sera la matrice... Donc ici le vecteur $(1,0,0)$ reste fixe, le $(0,1,0)$ est envoyé à $(0,-1,0)$, Et le $(0,0,1)$ reste fixe. Maintenant j'ai ces deux applications auxquelles j'ai associé une matrice. Et puis maintenant comme nous venons de voir, si je fais la composition de ces deux applications ou bien dans le sens où R_θ , composée avec S , ou bien dans le sens S composée avec R_θ . Je peux faire les deux comme j'opère sur \mathbb{R}^3 .

Notes

Summary



5m 46s

Exemple. Soit $R_\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la rotation dans le plan (xy) , d'angle θ autour de l'axe de rotation z . Fixons la base canonique \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 . Alors $[R_\theta]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (voir exercices).

Soit $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la symétrie orthogonale par rapport au plan (xz) . Alors

$$S(a, b, c) = (a, -b, c). \quad \text{On a} \quad [S]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question: $S \circ R_\theta$ est-elle égale à $R_\theta \circ S$?



6.4 La composition d'applications linéaires

Alors je peux savoir quelle est la matrice de cette composition en faisant le produit de ces deux matrices. Question : est-ce que les deux compositions, S composée avec R_θ , et R_θ composée avec S sont les mêmes. Maintenant je pense que vous pouvez très bien faire ça géométriquement, mais je veux juste faire ça avec les matrices pour voir comment ça marche.

Notes

Summary



7m 08s

Rappel. On a $[R_\theta]_{CC} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $[S]_{CC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$[S \circ R_\theta]_{CC} = [S]_{CC} \cdot [R_\theta]_{CC} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[R_\theta \circ S]_{CC} = [R_\theta]_{CC} \cdot [S]_{CC} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.4 La composition d'applications linéaires



Donc je me suis redonnée là les deux matrices, et puis je dis que la matrice de la composition de R_θ avec S dans ce sens-là, par rapport à la base canonique deux fois, est égale au produit de ces deux matrices et puis ceci est égal à... Je ne vais pas faire tous les détails du calcul ici, parce que vous pouvez multiplier la matrice. Je vais juste souligner une chose : c'est que si je mets cette matrice-là à gauche, et puisque ça c'est une matrice élémentaire, le résultat c'est juste de multiplier la deuxième ligne ici par -1 . Donc ici j'aurai [voir écran] Ici je fais dans l'autre sens : R_θ composée avec S , cette matrice-là, donc la matrice de cette composition sera de nouveau le produit, c'est le résultat que nous avons montré. Et puis si je mets cette matrice-là à droite, Je sais que c'est une matrice élémentaire qui va opérer sur la colonne, donc je vais juste multiplier cette colonne-là par -1 . Donc la première colonne, ne change pas. Et puis, on voit qu'en général, ces deux applications ne sont pas pareilles parce que les matrices qui les représentent ne sont pas égales.

Notes

Summary



7m 36s

Rappel. On a $[R_\theta]_{CC} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $[S]_{CC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$[S \circ R_\theta]_{CC} = [S]_{CC} \cdot [R_\theta]_{CC} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[R_\theta \circ S]_{CC} = [R_\theta]_{CC} \cdot [S]_{CC} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En général, $S \circ R_\theta \neq R_\theta \circ S$.

Si $\theta = \pi$ alors $S \circ R_\theta = R_\theta \circ S$.



6.4 La composition d'applications linéaires

En général, S composée avec R_θ , n'est pas égal à R_θ composée avec S . En fait, vous pouvez vérifier que si θ est égale à π , alors ça donne le même résultat. Donc c'est juste un exemple, où éventuellement c'est plus facile de faire une multiplication de matrice que de faire la composition de deux applications. Ici ce n'est pas compliqué de faire la composition mais je voulais faire un exemple géométrique en premier.

Notes

Summary

