

6.5 Applications inversibles



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant, nous savons que la composition d'application linéaire correspond à la multiplication de matrices sous cette bijection entre les applications et les matrices. Nous allons pouvoir aussi faire un lien entre les applications bijectives et les matrices inversibles.

Notes

Summary

0m 04s



Soient V et W des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. On sait que s'il existe une application linéaire bijective (invertible) $T : V \rightarrow W$ alors $\dim V = \dim W$. Supposons $\dim V = \dim W$ et $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ sont des bases de V et W . $\dim V = n = \dim W$.

Proposition Une application linéaire $T : V \rightarrow W$ est bijective si et seulement si $[T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$ est une matrice inversible.

Preuve Posons $D = [T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$ et supposons que D est inversible.

6.5 Applications inversibles



Donc je me donne deux espaces vectoriels de dimension finie. Je sais déjà que s'il y a une application linéaire bijective entre V et W alors V et W ont la même dimension. Donc je me mets sous cette hypothèse: je suppose qu'ils ont la même dimension et je me fixe deux bases. Et je vais fixer ici que $\dim(V) = n = \dim(W)$. Je vais montrer la proposition suivante : donc sous l'hypothèse que j'ai la dimension de V égale à la dimension de W alors une application linéaire T de V dans W est bijective, si et seulement si, la matrice qui la représente par rapport à ces deux bases que nous avons fixées, est une matrice inversible. Je fais la remarque que tout cela a un sens parce que si cela est bijectif, alors les dimensions sont identiques, et cette matrice-là est carrée. Alors on peut parler de l'inversibilité de la matrice. Je fais la preuve. D'abord je suppose que cette matrice est inversible. Pour ne pas s'embêter avec cette notation, posons, D la matrice de l'application, et supposons que D est inversible. D inversible, cela veut dire qu'il existe une autre matrice.

Notes

Summary



Soient V et W des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. On sait que s'il existe une application linéaire bijective (invertible) $T: V \rightarrow W$ alors $\dim V = \dim W$. Supposons $\dim V = \dim W$ et B_V, B_W sont des bases de V et W . $\dim V = n = \dim W$.

Proposition Une application linéaire $T: V \rightarrow W$ est bijective si et seulement si $[T]_{B_W B_V}$ est une matrice inversible.

Preuve Posons $D = [T]_{B_W B_V}$ et supposons que D est inversible. Alors il existe $C \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.q. $CD = I_n = D \cdot C$. Par la bijectivité de $\theta: \mathcal{L}(W, V) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$, il existe $S: W \rightarrow V$ t.q. $[S]_{B_V B_W} = C$.
 $[id_V]_{B_V B_V} = I_n = CD = [S]_{B_V B_W} \cdot [T]_{B_W B_V} = [S \circ T]_{B_V B_V} \Rightarrow S \circ T = id_V$. De même $T \circ S = id_W$.

6.5 Applications inversibles



C , une matrice $n \times n$, telle que $CD = I = DC$. Par la bijectivité de l'application θ entre les applications linéaires de W dans V vers des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels, il existe, une application $S: W \rightarrow V$, telle que la matrice de S par rapport à ces bases B_W, B_V est la matrice C . Maintenant je fais CD c'est la matrice $[S]_{B_V B_W} [T]_{B_W B_V}$ et comme on l'a vu dans la vidéo précédente, ceci est égal à la matrice de la composition $[S \circ T]_{B_V B_V}$. Mais de l'autre côté, je sais que ceci est égal à la matrice I . Ce qui est la même chose que la matrice de l'application $[id_V]_{B_V B_V}$. Et par la bijectivité de θ ici j'ai θ de l'identité, ici j'ai le θ de $S \circ T$ donc ça implique que $S \circ T = id_V$. Dans l'autre sens c'est la même chose. Donc de même, $T \circ S = id_W$. Donc T est bien une application inversible, donc bijective.

Notes

Summary



2m 23s

Soient V et W des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. On sait que s'il existe une application linéaire bijective (invertible) $T: V \rightarrow W$ alors $\dim V = \dim W$. Supposons $\dim V = \dim W$ et B_V, B_W sont des bases de V et W . $\dim V = n = \dim W$.

Proposition Une application linéaire $T: V \rightarrow W$ est bijective si et seulement si $[T]_{B_W B_V}$ est une matrice inversible.

Preuve Posons $D = [T]_{B_W B_V}$ et supposons que D est inversible. Alors il existe $C \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.q. $CD = I_n = D \cdot C$. Par la bijectivité de $\Theta: \mathcal{L}(W, V) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$, il existe $S: W \rightarrow V$ t.q. $[S]_{B_V B_W} = C$.
 $[id_V]_{B_V B_V} = I_n = CD = [S]_{B_V B_W} \cdot [T]_{B_W B_V} = [S \circ T]_{B_V B_V} \Rightarrow S \circ T = id_V$. De même $T \circ S = id_W$.
 Dnc T est une application linéaire inversible, dnc bijective.
 Exercice: montrer la 2^e implication.

6.5 Applications inversibles



Maintenant l'autre direction où l'on commence avec une application bijective et on montre que la matrice est inversible c'est pareil, donc pas besoin de faire la deuxième implication. Je laisse ça comme exercice. Exercice : montrer la deuxième implication.

Notes

Summary



Conséquence Soit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire bijective.

T est inversible avec inverse T^{-1} .

$$\text{On a } [T]_{B_W B_V}^{-1} = [T^{-1}]_{B_V B_W}.$$

6.5 Applications inversibles



Conséquence : si je me donne T une application linéaire bijective, alors T est inversible, donc il y a une inverse. Et par la démonstration précédente, la matrice de T par rapport à des bases qu'on a fixées, elle est inversible, et l'inverse de cette matrice, c'est exactement la matrice de l'inverse par rapport aux bases dans l'autre sens, c'est une conséquence de la démonstration. J'aimerais juste faire un petit exemple.

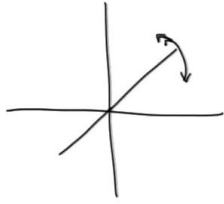
Notes

Summary



5m 06s

Exemple. Soit $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$.



$$S((1,0)) = (0,1)$$

$$S((0,1)) = (1,0)$$

$$[S]_{ee} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

S est son propre inverse car $S \circ S = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$

Aussi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$!



6.5 Applications inversibles

Je me donne une application linéaire de $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$. J'aimerais écrire la matrice et l'application. Donc $y = x$. Cela ça bascule, à travers cette droite-là. Donc $S((1,0)) = (0,1)$ et $S((0,1)) = (1,0)$ Donc la matrice de S par rapport, disons, à la base canonique de \mathbb{R}^2 est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible, c'est facile à voir, mais je veux juste faire remarquer ici, que S est son propre inverse car si on fait $S \circ S$ alors je fais la symétrie et ensuite la symétrie, c'est évident que c'est égal à l'identité sur \mathbb{R}^2 . Je bascule deux fois et c'est comme si je n'avais rien fait. Aussi, si je fais la matrice de S fois la matrice de S j'obtiens, je fais la multiplication, j'obtiens bien la matrice identité 2×2 . C'est ce qu'il faut, l'application est sa propre inverse et la matrice est sa propre inverse.

Notes

Summary



6m 11s