



6.6 Rang ligne, rang colonne revisités



Dans cette vidéo, nous allons montrer un théorème que j'aime beaucoup, c'est que nous allons établir en utilisant des matrices des applications linéaires, nous allons établir le fait que le rang colonne d'une matrice est égal au rang ligne. Donc on a appris comment calculer ces rangs, je vais vous le rappeler. Après, on a un peu quitté cela, on a étudié les applications linéaires, on est en train de mettre en place un système pour associer une matrice à une application linéaire. Et le résultat de cela est que l'on va pouvoir utiliser le théorème du rang pour montrer ce que je viens de dire, c'est que le rang ligne d'une matrice est le même que le rang colonne.

Notes

Summary



0m 04s

Rappel. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

- (1) rang ligne de $A = \dim \text{Vect}(L_1, \dots, L_m)$ où L_1, \dots, L_m lignes de A vues comme vecteurs de \mathbb{R}^n .
- (2) rang colonne de $A = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$ où C_1, \dots, C_n colonnes de A vues comme vecteurs de \mathbb{R}^m .



6.6 Rang ligne, rang colonne revisités



D'abord je rappelle les définitions : Je me donne une matrice $m \times n$ à coefficients réels. Alors, on se rappelle que le rang ligne de A , c'est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes de A , où je regarde les lignes de A comme des vecteurs dans \mathbb{R}^n , la matrice a n colonnes, donc c'est des vecteurs dans \mathbb{R}^n . Et puis, le rang colonne de A , c'est un peu pareil, c'est que je prends le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A , où je regarde les colonnes de A comme des vecteurs dans \mathbb{R}^m , comme il y a m lignes, les colonnes ont m composantes. Maintenant, ce que je peux faire, comme j'ai une matrice et j'ai cette bijection, je vais fixer une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m qui a A comme matrice. Donc, fixons déjà des bases de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m . C'est en fait des bases quelconques, donc on pourrait prendre les bases canoniques, mais ce n'est pas important. Donc, fixons une base B_1 de \mathbb{R}^n et une base B_2 de \mathbb{R}^m .

Notes

Summary



0m 40s

Rappel. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

- (1) rang ligne de $A = \dim \text{Vect}(L_1, \dots, L_m)$ où L_1, \dots, L_m lignes de A vues comme vecteurs de \mathbb{R}^n .
- (2) rang colonne de $A = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$ où C_1, \dots, C_n colonnes de A vues comme vecteurs de \mathbb{R}^m .

Fixons une base B_1 de \mathbb{R}^n et une base B_2 de \mathbb{R}^m .

$$B_1 = (v_1, \dots, v_n)$$

$$B_2 = (w_1, \dots, w_m)$$

Alors il existe une application linéaire $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $[T]_{B_2 B_1} = A$.

$$\text{rang}(T) = \dim(\text{Im}(T)).$$

$\text{Im}(T)$ est engendré par $T(v_1), \dots, T(v_n)$. Donc $\text{rang}(T) = \dim \text{Vect}(T(v_1), \dots, T(v_n))$



6.6 Rang ligne, rang colonne revisités



Par la bijection que nous avons établie, il existe une application linéaire, T , qui part de \mathbb{R}^n et qui arrive dans \mathbb{R}^m , telle que la matrice de T par rapport à ces deux bases fixées est exactement la matrice A . Maintenant, le rang de T , en tant qu'application linéaire est par définition la dimension de l'image de T . Et l'image de T est le sous-espace vectoriel engendré par les images d'une base. Donc ici, je fixe que la base B_1 , c'est les vecteurs (v_1, \dots, v_n) , et B_2 , c'est les vecteurs (w_1, \dots, w_m) . Et l'image de T est engendrée par les images d'une base, donc par $T(v_1), \dots, T(v_n)$. De plus $T(v_1), \dots, T(v_n)$ sont exactement les colonnes quand on les représente par rapport à la base B_2 . Donc le rang de T est égal à la dimension du sous-espace $\text{Vect}(T(v_1), \dots, T(v_n))$. Et $T(v_i)$ représenté par rapport à la base B_2 est exactement la i -ème colonne de la matrice A , donc le rang de T est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par C_1, \dots, C_n .

Notes

Summary



1m 51s

Rappel. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$.

- (1) rang ligne de $A = \dim \text{Vect}(L_1, \dots, L_m)$ où L_1, \dots, L_m lignes de A vues comme vecteurs de \mathbb{R}^n .
- (2) rang colonne de $A = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$ où C_1, \dots, C_n colonnes de A vues comme vecteurs de \mathbb{R}^m .

Fixons une base B_1 de \mathbb{R}^n et une base B_2 de \mathbb{R}^m .

$$B_1 = (v_1, \dots, v_n)$$

$$B_2 = (w_1, \dots, w_m)$$

Alors il existe une application linéaire $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $[T]_{B_2 B_1} = A$.

$$\text{rang}(T) = \dim(\text{im}(T)).$$

$\text{im}(T)$ est engendré par $T(v_1), \dots, T(v_n)$. Donc $\text{rang}(T) = \dim \text{Vect}(T(v_1), \dots, T(v_n))$

$$[T(v_i)]_{B_2} = C_i. \quad \text{Donc } \text{rang}(T) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \text{rang colonne de } A.$$

Donc $\text{rang}(T) = \text{rang colonne de } A$.

6.6 Rang ligne, rang colonne revisités



Et ça, c'est le rang colonne de la matrice A . Donc on voit maintenant le lien entre le rang de T , c'est la même chose que le rang colonne de A . Faisons un exemple.

Notes

Summary



Exemple. Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$.

Fixons des bases B_1, B_2 .

$$B_1 = ((1, 1), (1, -1))$$

$$B_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Posons $A = [T]_{B_2 B_1}$,

$$T((1, 1)) = (2, 0, 1)$$



6.6 Rang ligne, rang colonne revisités



Notes

Je me donne une application linéaire qui part de \mathbb{R}^2 et qui arrive dans \mathbb{R}^3 , et qui est une application assez simple. Et puis je vais juste écrire la matrice, et ensuite regarder la dimension de l'image, et voir que c'est le même que le rang colonne. Je fixe des bases, ici, donc : Fixons des bases B_1, B_2 . Juste pour faire un exercice, je vais fixer des bases pas forcément canoniques. Disons que pour B_1 , je vais prendre la base $((1, 1), (1, -1))$. Pourquoi pas, c'est une base, ce sont deux vecteurs linéairement indépendants dans \mathbb{R}^2 , donc ça forme une base. Et B_2 , par contre, je vais prendre quand même la base canonique de \mathbb{R}^3 . Maintenant, je vais calculer la matrice A , posons A , la matrice de T par rapport à ces deux bases. Donc je dois trouver cette matrice, je calcule T du premier vecteur de la base, en utilisant la formule, et j'obtiens $(2, 0, 1)$. Et T appliquée au deuxième vecteur de la base, j'obtiens $(0, 2, -1)$.

Summary



4m 24s

Exemple. Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$.

Fixons des bases B_1, B_2 .

$$B_1 = ((1, 1), (1, -1))$$

$$B_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Posons $A = [T]_{B_2 B_1}$,

$$T((1, 1)) = (2, 0, 1) = 2(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1)$$

$$T((1, -1)) = (0, 2, -1) = 0(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + (-1)(0, 0, 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A a deux colonnes linéairement indépendantes et donc le rang colonne de A est égal à 2.

$$\text{rang}(T) = \dim(\text{Im}(T)) = \dim \text{Vect}((2, 0, 1), (0, 2, -1)) = 2.$$

6.6 Rang ligne, rang colonne revisités



Puis, pour écrire la matrice de T par rapport aux bases B_1 et B_2 , je vais maintenant exprimer ça en terme de la base B_2 , mais cette fois, c'est facile, parce que c'est la base canonique, c'est deux fois le premier vecteur plus zéro fois le deuxième plus une fois le troisième. Et ici, c'est zéro fois le premier plus deux fois le deuxième plus -1 fois le troisième. Et donc A est égal à la matrice [voir écran] Alors, maintenant, quel est le rang de T ? Et quel est le rang colonne de A ? Le rang colonne de A est facile, parce qu'on voit que là, j'ai deux colonnes qui sont linéairement indépendantes, donc A a deux colonnes linéairement indépendantes, et donc le rang colonne de A est égal à 2. Maintenant, si je regarde le rang de l'application, c'est la dimension de l'image, et ça, c'est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les images de la base, donc engendré par $(2, 0, 1)$ et $(0, 2, -1)$, qui est également égal à 2. Donc vous voyez pourquoi c'est le cas, parce que les colonnes donnent exactement l'image par l'application des vecteurs de base.

Notes

Summary



Théorème. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Alors le rang colonne de A est égal au rang ligne de A .

Preuve Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire telle que $[T]_{B_2, B_1} = A$, où

B_1 et B_2 sont des bases de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m respectivement.

$$\text{rang colonne de } A = \text{rang}(T) = \dim(\text{im}(T)) \overset{\substack{\uparrow \\ \text{théorème du} \\ \text{rang}}}{=} \dim \mathbb{R}^m - \dim \ker T = m - \dim(\ker T).$$



6.6 Rang ligne, rang colonne revisités

Maintenant, le théorème dont j'ai parlé avant, c'est le suivant : Je me donne une matrice m fois n quelconque, alors le rang colonne de A est égal au rang ligne de A . Ce n'est pas du tout attendu, mais nous allons le démontrer. Donc, Preuve : J'ai cette matrice, donc de nouveau, je vais utiliser une application qui correspond à cette matrice, donc soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, une application linéaire telle que la matrice de T par rapport aux deux bases que l'on va fixer est égale à cette matrice A , où B_1 et B_2 sont des bases de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m , respectivement. Maintenant, j'ai une matrice, alors j'ai une application. Le rang colonne de A , on vient de voir que c'est la même chose que le rang de T , et le rang de T , c'est la dimension de l'image de T . Et maintenant, on vient avec le théorème du rang, donc ça, c'est très important. Ça, c'est une utilisation du théorème du rang : c'est que ceci est égal à la dimension de l'espace de départ moins la dimension du noyau de T . Donc c'est égal à n moins la dimension du noyau de T . Maintenant, étudions ce qu'est le noyau de T .

Notes

Summary



Théorème. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Alors le rang colonne de A est égal au rang ligne de A .

Preuve Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire telle que $[T]_{B_2} = A$, où

B_1 et B_2 sont des bases de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m respectivement.

$$\text{rang colonne de } A = \text{rang}(T) = \dim(\text{im}(T)) \overset{\substack{\uparrow \\ \text{théorème du} \\ \text{rang}}}{=} \dim \mathbb{R}^m - \dim \ker T = m - \dim(\ker T).$$

$\ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid T(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid A[v]_{B_1} = 0\} =$ le solution du système d'équation $AX = 0$, où

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On échelonne A pour obtenir \hat{A} , une matrice échelonnée ligne équivalente à A .
 $\dim(\ker T) = n - \text{nombre de pivots dans } \hat{A}$

6.6 Rang ligne, rang colonne revisités



Le noyau de T , c'est tous les vecteurs dans \mathbb{R}^n , tels que T appliqué à v est égal à zéro. Maintenant, en termes des matrices, ça, c'est tous les vecteurs dans \mathbb{R}^n , tels que la matrice de T , qui est A multipliée par v exprimé par rapport à la base B_1 est égal à zéro. Donc ça, c'est exactement les solutions du système d'équation $AX = 0$. Donc le noyau de T , c'est exactement les solutions du système d'équation $AX = 0$, où ici, X est une colonne de variables. Maintenant, si j'échelonne la matrice A , on échelonne A pour obtenir \hat{A} , une matrice échelonnée ligne équivalente à A . Et à ce moment-là, on sait comment trouver la dimension du noyau, la dimension du noyau, c'est la dimension de l'espace des solutions, et ça, c'est exactement, on doit compter les variables libres, donc on va prendre n (les n variables) et on soustrait le nombre de pivots. Donc, ici, on échelonne la matrice, donc la dimension de $\text{Ker}(T)$ est égale à n moins le nombre de pivots dans la matrice \hat{A} . Donc ça, c'est égal à n moins le nombre de lignes non nulles de \hat{A} .

Notes

Summary



Théorème. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Alors le rang colonne de A est égal au rang ligne de A .

Preuve Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire telle que $[T]_{B_2, B_1} = A$, où

B_1 et B_2 sont des bases de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m respectivement.

$$\text{rang colonne de } A = \text{rang}(T) = \dim(\text{im}(T)) \overset{\substack{\uparrow \\ \text{théorème du} \\ \text{rang}}}{=} \dim \mathbb{R}^m - \dim \ker T = m - \dim(\ker T). \quad (*)$$

$\ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid T(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid A[v]_{B_1} = 0\} =$ le solution du système d'équation $AX = 0$, où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad \text{On échelonne } A \text{ pour obtenir } \hat{A}, \text{ une matrice échelonnée ligne équivalente à } A.$$

$$\dim(\ker T) = n - \text{nombre de pivots dans } \hat{A}$$

$$= n - \text{nombre de lignes non nulles de } \hat{A}$$

$$\text{Donc } m - \dim(\ker T) = \text{nombre de lignes non nulles de } \hat{A} = \text{rang ligne de } \hat{A} = \text{rang ligne de } A \quad \square$$

6.6 Rang ligne, rang colonne revisités



Ici, je reviens, ce que je cherche là-haut, c'est n moins la dimension du noyau. Donc n moins la dimension du noyau, c'est exactement n moins ça. C'est égal au nombre de lignes non nulles de cette matrice échelonnée. Et ça, c'est exactement le rang ligne de \hat{A} , qui est égal, comme les deux matrices sont lignes équivalentes, au rang ligne de A . Donc, tout là-haut, j'ai commencé avec le rang colonne de A , je raisonne un petit peu en utilisant au milieu le théorème du rang, c'est vraiment la chose puissante que nous avons utilisée. Et après, je raisonne avec la dimension de l'espace des solutions d'un système homogène, puis j'obtiens que cette valeur-là, le rang colonne de A , c'est exactement le rang ligne de cette matrice \hat{A} qui est ligne équivalente à A , et donc c'est égal au rang ligne de A . Donc, c'est plutôt super. Faisons un exemple.

Notes

Summary



Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 11 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculons le rang ligne de A.

On échelonne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 11 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & -13 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rang ligne = nombre de lignes non nulles = 3.

Rang colonne, par le théorème est aussi égal à 3!

6.6 Rang ligne, rang colonne revisités



Je prends la matrice 4×5 , et je vais calculer le rang ligne, donc on sait que pour calculer le rang ligne, je vais juste échelonner la matrice, et après, je compte les lignes non nulles dans la forme échelonnée. Donc on échelonne. Le rang ligne est toujours celui qui est facile, parce que je vais échelonner, donc on échelonne. Je le fais rapidement parce qu'on a souvent fait ça. Je garde la première ligne, ainsi que les deuxième et troisième. Ensuite j'additionne la première ligne à la quatrième, donc j'ai $0,3,3,5,3$. Maintenant, je garde les deux première lignes. Je vais additionner à la troisième ligne -4 fois la deuxième. Donc j'ai $0,0,-12,-13,6$. Maintenant, je vais additionner -3 fois la deuxième ligne à la dernière, donc j'ai $0,0,-12,-13, 6$. Et on voit qu'on a deux lignes qui sont égales, donc je peux éliminer une des lignes, et j'arrive à cette matrice-là, qui est une matrice échelonnée. Donc le rang ligne, c'est le nombre de lignes non nulles, est égal à trois. Et maintenant, si je prends le rang colonne, donc le rang colonne, par le théorème, est aussi égal à trois. C'est ça qui est super.

Notes

Summary



12m 26s

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 11 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculons le rang ligne de A.

On échelonne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 11 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & -13 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rang ligne = nombre de lignes non nulles = 3.

Rang colonne, par le théorème est aussi égal à 3!

6.6 Rang ligne, rang colonne revisités



Maintenant, si je voulais calculer ça, je devrais prendre toutes les colonnes, et faire un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 , et calculer la dimension de ce sous-espace, mais vous voyez qu'il y a beaucoup de colonnes, et ce serait beaucoup de calculs, ou bien je tourne la matrice en matrice transposée, et j'échelonne cette matrice-là. C'est quand même plus de travail, tandis qu'ici, ça vient plus facilement, de faire les opérations sur les lignes de cette matrice-là. Après, on a un choix, si on veut calculer le rang ligne d'une matrice, ou bien le rang colonne, on peut décider lequel est plus simple, et on sait maintenant que ça donnera le même résultat pour les deux calculs.

Notes

Summary

