


6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



Nous allons continuer à exploiter ce lien entre les applications linéaires et les matrices qui les représentent. Dans la vidéo précédente, nous avons vu qu'on peut utiliser le théorème du rang pour les applications linéaires, pour montrer quelque chose de nouveau sur les matrices. Dans cette vidéo, nous allons utiliser les méthodes matricielles pour simplifier le calcul d'une base de l'image et du noyau d'une application linéaire.

Notes

Summary



Soient V, W des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie, et soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. On écrit $A = [T]_{B_W B_V}$, pour des bases B_V, B_W de V, W , respectivement.

$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\} = \{v \in V \mid A(v)_{B_W} = 0\}$. On résout le système homogène $AX = 0$.

On cherche une base de l'ensemble des solutions. On interprète cette base comme vecteurs donnés en termes de la base B_V .

6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



Je me donne deux espaces vectoriels de dimension finie V et W . Et puis, je fixe des bases B_V et B_W de V et W respectivement. Et je me donne une application linéaire T qui part de V , qui arrive dans W . Et je pose A , la matrice de l'application par rapport à ces deux bases que nous avons fixées. Maintenant, je sais que le noyau de T , je rappelle ce qu'on a vu dans la vidéo précédente, c'est tous les v dans V tels que $T(v) = 0$, et c'est exactement, tous les v dans V tels que A , qui multiplie le vecteur colonne v par rapport à la base B_V , donne 0 . Donc, on a une méthode ici pour trouver le noyau, on résout un système homogène. Le système homogène $AX=0$, on résout ce système. Et puis, après, on cherche une base de l'ensemble des solutions. Et ensuite, il faut bien voir cette base comme des représentations des vecteurs dans l'espace V par rapport à la base B_V . On interprète cette base comme vecteurs donnés en termes de la base B_V . On l'avait déjà fait en détail, je crois, dans la vidéo du paragraphe 4.5.

Notes

Summary



0m 34s

Soient V, W des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie, et soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. On écrit $A = [T]_{B_W B_V}$, pour des bases B_V, B_W de V, W , respectivement.

$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\} = \{v \in V \mid A(v)_{B_W} = 0\}$. On résout le système homogène $AX = 0$.

On cherche une base de l'ensemble des solutions. On interprète cette base comme vecteurs donnés en termes de la base B_V .

$\operatorname{im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid (w)_{B_W} = A(v)_{B_V} \text{ pour } v \in V\}$ le sous-espace engendré par les colonnes de A (vues comme des vecteurs dans W représentés par rapport à la base B_W)

On peut calculer une base de l'espace ligne de A^T et ça donne une base de $\operatorname{im}(T)$.

6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



Maintenant qu'en est-il de l'image ? Donc l'image de T , c'est l'ensemble des $T(v)$, avec v dans V , donc c'est l'ensemble des w dans W tel que w par rapport à la base B_W est égal à $A(v)$ par rapport à base B_V pour un v dans V . Et ça, c'est exactement l'espace qui est engendré par les colonnes de A , vues comme des vecteurs par rapport à la base B_W . Donc ça, c'est le sous-espace engendré par les colonnes de A , vues comme des vecteurs dans W , représentés par rapport à la base B_W . On saura calculer une base de l'image, on pourrait faire la chose suivante. Donc on peut calculer une base de l'espace ligne de la matrice transposée et ça donne une base de l'image de T , toujours représentée par rapport à la base B_W . Maintenant je vais énoncer une proposition qui simplifie la procédure, ça sera très clair après dans les exemples pourquoi c'est une simplification. Par contre, je ne vais pas démontrer cette proposition. Je vais juste vous donner une idée de la preuve, mais c'est quand même très utile.

Notes

Summary



2m 26s

Proposition. Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et C_1, \dots, C_n les colonnes de A . Soit \hat{A} une matrice échelonnée ligne équivalente à A . Si les pivots de \hat{A} se trouvent dans les colonnes i_1, \dots, i_t de \hat{A} , alors les colonnes C_{i_1}, \dots, C_{i_t} forment une base de l'espace colonne de A .

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$



6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées

Donc, c'est une méthode alternative pour calculer une base de l'image. Je me donne une matrice $m \times n$, et des colonnes, C_1, \dots, C_n . Et après, je vais échelonner cette matrice et puis j'obtiens une matrice \hat{A} , qui est ligne équivalente à la matrice originale A . Et maintenant, la proposition dit la chose suivante : Si les pivots de cette matrice \hat{A} se trouvent dans les colonnes numérotées i_1, \dots, i_t , donc c'est certaines des colonnes de cette matrice, alors, si je reviens en arrière vers la matrice A , et je prends exactement les colonnes avec les mêmes indices, ça, ça forme une base de l'espace colonne de A . Le contenu de cette proposition qui est intéressante, c'est qu'on a fait des opérations sur les lignes. Ça change beaucoup de choses sur l'espace des colonnes quand on fait les opérations sur les lignes. On ne pourra pas espérer obtenir une matrice dont l'espace colonne est pareil que l'espace colonne de la matrice originale. Mais cette proposition dit que si on prend les colonnes qui forment une base de l'espace colonne de la matrice résultante, échelonnée à la fin, on pourra juste dire : Où sont ces pivots-là ?

Notes

Summary



4m 12s

Proposition. Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et C_1, \dots, C_n les colonnes de A . Soit \hat{A} une matrice échelonnée ligne équivalente à A . Si les pivots de \hat{A} se trouvent dans les colonnes i_1, \dots, i_t de \hat{A} , alors les colonnes C_{i_1}, \dots, C_{i_t} forment une base de l'espace colonne de A .

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On échelonne A et on trouve

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑ ↑ ↑

, une matrice ligne équivalente à A .
Les pivots de \hat{A} se trouvent dans les colonnes 1, 2 et 3.

Par la proposition alors les colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

forment une base de l'espace colonne de A .

6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



Ça me dit quelles colonnes prendre dans la matrice originale. Donc je montre ça dans cet exemple. Puis après, peut-être, je donne juste l'idée de la preuve. Mais, ici, dans l'exemple. Donc, une base de l'espace des colonnes, je vais d'abord échelonner. Donc on échelonne A . Et comme, peut-être, on a fait beaucoup d'échelonnage, je vais juste vous donner une matrice ligne équivalente. Donc on échelonne A , et on trouve \hat{A} . Et je vais juste vous donner cette matrice, pour la première ligne, je n'ai pas changé. La deuxième, j'ai 0, 1, 2, 1. La troisième, 0, 0, 16, 7. Et après, j'ai une ligne de 0. On trouve ça, donc ça c'est une matrice ligne équivalente à A . Et puis, ce que dit cette proposition c'est que si maintenant je vais regarder les colonnes où il y a des pivots, donc il y a des pivots ici, ici et ici. Donc les pivots de \hat{A} se trouvent dans les colonnes un, deux et trois. Et donc la proposition dit, si on admet la proposition, alors les colonnes $(1, 3, 4, 0)$ $(2, 0, 1, 1)$ et $(-1, 1, -2, 2)$ forment une base de l'espace colonne de A . Donc ça, c'est assez magnifique.

Notes

Summary



Proposition. Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et C_1, \dots, C_n les colonnes de A . Soit \hat{A} une matrice échelonnée ligne équivalente à A . Si les pivots de \hat{A} se trouvent dans les colonnes i_1, \dots, i_t de \hat{A} , alors les colonnes C_{i_1}, \dots, C_{i_t} forment une base de l'espace colonne de A .

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On échelonne A et on trouve

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑ ↑ ↑

, une matrice ligne équivalente à A .
Les pivots de \hat{A} se trouvent dans les colonnes 1, 2 et 3.

Par la proposition alors les colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

forment une base de l'espace colonne de A .

L'idée de la preuve:

6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



Donc on échelonne la matrice, et à la fin, on peut prendre les colonnes ici avec des pivots et on revient en arrière. Maintenant, je vais souligner deux trois choses. Il est évident que ces colonnes-là ne peuvent être une base de l'espace des colonnes de A , parce que, regardez, ici, j'aurai toujours 0 dans la quatrième composante ce qui n'est pas du tout le cas avec le A . Et maintenant, ce qu'on a gagné ici, c'est que si je vous pose la question : «Quelle est une base de l'espace ligne et puis une base de l'espace colonne ?» Un seul calcul va donner la réponse, parce qu'ici une base de l'espace ligne de A , c'est ces trois lignes-là. Et une base de l'espace colonne, c'est ces trois lignes-là. Je le sais grâce à ce calcul sur les lignes. Donc c'est assez super. Maintenant pour la preuve, je vais juste vous donner l'idée de la preuve. C'est que, quand on échelonne la matrice, on sait qu'on fait ça par une suite d'opérations élémentaires, donc multiplication à gauche par des matrices élémentaires, donc E_i matrice élémentaire, pour tout i .

Notes

Summary



Exemple. Soit $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$, $T(p) = (p(1) + p(2), 3p(1), p(0), p(0) - p(1), 2p(0))$.

Proposition. Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et C_1, \dots, C_n les colonnes de A . Soit \hat{A} une matrice échelonnée ligne équivalente à A . Si les pivots de \hat{A} se trouvent dans les colonnes i_1, \dots, i_t de \hat{A} , alors les colonnes C_{i_1}, \dots, C_{i_t} forment une base de l'espace colonne de A .

(3) Déterminer $\text{im}(T) = \text{im}(A)$.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On échelonne A et on trouve

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, une matrice ligne équivalente à A .
Les pivots de \hat{A} se trouvent dans les colonnes 1, 2 et 3.

Par la proposition alors les colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

forment une base de l'espace colonne de A .

L'idée de la preuve: $\hat{A} = \underbrace{E_1 \dots E_t}_S A$
 E_i matrice élémentaire

$S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ inversible
 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

base de $\text{im}(A) = S^{-1}(\text{base de } \text{im}(SA))$

6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



Donc ici, si je pense ici que j'ai une matrice S , je mets tout ça ensemble, alors ça représente une application, disons S , bon je vais confondre la matrice et l'application, S qui va de \mathbb{R}^m vers \mathbb{R}^m inversible parce qu'on sait que c'est un produit d'applications inversibles, ou de matrices inversibles. Et ici le A , je vais aussi confondre la matrice et l'application : A de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^m . Et maintenant, ce que je cherche, c'est une base de l'image de A . Et ça sera exactement égal à S^{-1} d'une base de l'image de (SA) . Parce qu'ici le S , il pousse l'image d'un côté ou il revient vers l'image. C'est pour ça que la dimension de l'image, c'est exactement la dimension de l'image de SA . SA c'est la matrice qui est échelonnée. Ça c'est la \hat{A} . Et si on a cette matrice-là, et on veut une base de l'image, ça c'est une base de l'espace des colonnes et on voit bien qu'on aurait pu prendre ces trois-là. Donc, ça veut dire que la dimension est la même. Et pas seulement que la dimension c'est la même, mais c'est qu'on peut pousser la base pour revenir en arrière vers ces colonnes-là. Donc ça, c'est juste l'idée de la preuve. Maintenant, appliquons ça à un exemple, je vais faire un grand exemple avec beaucoup de questions.

Notes

Summary



Exemple. Soit $T : \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$, $T(p) = (p(1) + p(2), 3p(1), p(0), p(0) - p(1), 2p(0))$.

- (1) Trouver une base de $\ker(T)$ et une base de $\text{im}(T)$.
- (2) Déterminer si T est injective ou surjective.
- (3) Déterminer si $(1, 0, 1, 0, 1) \in \text{im}(T)$.

6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



Donc je me donne une application linéaire qui part des polynômes de degré, au plus, quatre, à coefficients réels, qui arrive dans \mathbb{R}^5 . Et puis, là, c'est la formule pour l'application. Et puis, je veux faire plein de choses, je veux trouver une base du noyau, une base de l'image, je veux déterminer si T est injective ou surjective, donc en l'occurrence, je saurai si c'est bijective. Et puis, ensuite, je me donne un vecteur précis, je veux savoir si ce vecteur-là est dans l'image. Évidemment, si l'application est surjective, le vecteur appartient à l'image. Mais si on trouve que l'application n'est pas surjective après on doit faire un calcul pour déterminer si ce vecteur-là appartient à l'image ou non. Maintenant avant de commencer, je vais souligner deux, trois choses. Le $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$, c'est un espace de dimension 5, et là, je vais vers un espace de dimension 5. Donc, en fait, tout peut arriver. Ça peut être injectif, ça peut être surjectif, ça peut être bijectif. Donc c'est-à-dire, pour vous rappeler la situation, 5 est assez grand pour qu'on puisse mettre $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ injectivement dedans. Le $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ dimension 5, c'est assez grand pour qu'on puisse aller surjectivement sur \mathbb{R}^5 .

Notes

Summary



10m 17s

Exemple. Soit $T : \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$, $T(p) = (p(1) + p(2), 3p(1), p(0), p(0) - p(1), 2p(0))$.

(1) Trouver une base de $\ker(T)$ et une base de $\text{im}(T)$.

(2) Déterminer si T est injective ou surjective.

(3) Déterminer si $(1, 0, 1, 0, 1) \in \text{im}(T)$.

Fixons des bases $B = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ et $C = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$, resp. \mathbb{R}^5 .

Cherchons $[T]_{CB}$.

$$T(1) = (2, 3, 1, 0, 2)$$

$$T(x) =$$

6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



Donc ce sont toutes les déductions que nous avons étudiées dans la partie théorème du rang. Donc, ici, tout est possible. Toutes ces questions-là sont des vraies questions. Maintenant, moi je veux utiliser les méthodes matricielles pour résoudre ce problème. Donc je pose déjà une matrice de l'application. Comme ici, il n'y a aucune raison de choisir des bases compliquées, je vais choisir ma base préférée de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ et la base canonique de \mathbb{R}^5 . Fixons des bases. $B = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ et $C = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ respectivement \mathbb{R}^5 . Et puis, je vais calculer la matrice de T par rapport à ces bases-là. Donc cherchons la matrice de T par rapport aux bases B et C . Je calcule les images par T des éléments de cette base-là. Donc $T(1)$. C'est un polynôme, je l'évalue n'importe où, j'obtiens 1. Donc ici, j'aurai $1 + 1 = 2$; $3 \cdot 1 = 3$; $1 \cdot 1 = 1$; 0 ; et 2 . Et puis maintenant, j'évalue en x . $T(x) = \dots$ Donc ça, ça donne $1 + 2 = 3$; $3 \cdot 1$, donc 3; il s'évalue en zéro, c'est 0; $0 - 1$, donc -1; et $2 \cdot 0$, donc 0.

Notes

Summary



11m 36s

Exemple. Soit $T : \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^5$, $T(p) = (p(1) + p(2), 3p(1), p(0), p(0) - p(1), 2p(0))$.

(1) Trouver une base de $\ker(T)$ et une base de $\text{im}(T)$.

(2) Déterminer si T est injective ou surjective.

(3) Déterminer si $(1, 0, 1, 0, 1) \in \text{im}(T)$.

Fixons des bases $B = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ et $C = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$, resp. \mathbb{R}^5 .

Cherchons $[T]_{CB}$.

$$T(1) = (2, 3, 1, 0, 2)$$

$$T(x) = (3, 3, 0, -1, 0)$$

$$T(x^2) = (5, 3, 0, -1, 0)$$

$$T(x^3) = (9, 3, 0, -1, 0)$$

$$T(x^4) = (17, 3, 0, -1, 0)$$

$$\text{Posons } A = [T]_{CB} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 & 17 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker(T)$: l'ensemble des solutions du système $AX = 0$

La matrice échelonnée de A :

6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



J'évalue en x^2 . Je vais plus rapidement car vous avez compris. En $T(x^2) = \dots (5, 3, 0, -1, 0)$. $T(x^3) = \dots (9, 3, 0, -1, 0)$. Et $T(x^4) = \dots (17, 3, 0, -1, 0)$. Donc la matrice de T par rapport à ces deux bases. Comme dans le deuxième espace, ici \mathbb{R}^5 , j'ai choisi la base canonique, il est facile à voir comment exprimer ces vecteurs en termes de cette base, c'est juste les coordonnées qu'on voit là. Donc la matrice, c'est que je dois mettre ça dans la première colonne : 2, 3, 1, 0, 2. Ensuite 3, 3, 0, -1, 0 dans la deuxième, etc. Voilà. Maintenant, j'ai posé les bases, je n'ai pas encore répondu aux questions. Mais maintenant j'ai une matrice avec laquelle je peux travailler. D'abord je vais trouver une base du noyau. Donc une base... D'abord je vais trouver le noyau. Donc le noyau de T , c'est l'ensemble des solutions du système homogène. De nouveau interprété en termes de la base de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$. Alors, la matrice échelonnée, je vais vous dire ce que c'est. Donc la matrice échelonnée. Je vais commencer le prochain slide avec ces deux matrices.

Notes

Summary



13m 24s

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 & 17 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions du système $AX=0$ est

d, e libres

$$c = -3d - 7e$$

$$b = -(-3d - 7e) - d - e = 2d + 6e$$

$$a = 0$$

$$\ker T = \left\{ a \cdot 1 + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4 \mid \begin{array}{l} d, e \text{ libre, } a=0 \\ b = 2d + 6e, c = -3d - 7e \end{array} \right\}$$



6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



Donc, j'ai la matrice qu'on vient de... de poser. Et puis, j'ai échelonné la matrice, et je dis que ce que j'ai obtenu c'est ça. Maintenant, l'ensemble des solutions. Donc, l'ensemble des solutions du système AX égal à zéro est... Maintenant ici, j'ai des pivots là. Donc j'aurai deux variables libres là. Donc je dis, c'est donné par... Disons que j'appelle ça : a, b, c, d, e . Ici, je trouve que d et e sont libres. Et puis $c = -3d - 7e$. $b = -c - d - e$ qui donne $2d + 6e$. Et puis $a = 0$. Donc ça, c'est ce qui décrit l'ensemble des solutions. Et maintenant, comme je veux calculer le noyau de T , ça c'est exactement les polynômes. Donc ces coefficients-là, il faut les voir comme les coefficients par rapport à la base de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$. C'est : $a \cdot 1 + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4$ tel que, avec ces conditions-là, donc le d et le e sont libres, $a=0$, $b = 2d + 6e$, et $c = -3d - 7e$. Donc, ça, c'est le noyau. Je réécris. Ceci est égal à, bon le a est 0 donc je n'ai plus ça, le b , c'est : $2d + 6e$, donc fois $x + (-3d - 7e) \cdot x^2 + d x^3 + e x^4$.

Notes

Summary



$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 & 17 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions du système $AX=0$ est

d, e libres

$$c = -3d - 7e$$

$$b = -(-3d - 7e) - d - e = 2d + 6e$$

$$a = 0$$

$$\ker T = \{ a \cdot 1 + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4 \mid d, e \text{ libre, } a=0, b=2d+6e, c=-3d-7e \}$$

$$= \{ (2d+6e)x + (-3d-7e)x^2 + d x^3 + e x^4 \mid d, e \in \mathbb{R} \}.$$

$$\text{base de } \ker(T) : \begin{matrix} d=1, e=0 \\ d=0, e=1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2x - 3x^2 + x^3 \\ 6x - 7x^2 + x^4 \end{matrix} \right\} \quad \text{base de } \ker(T).$$

$\dim(\ker T) = 2$, donc T n'est pas injective.

Par le théorème du rang, $\dim(\text{im } T) = 5 - 2 = 3$; T n'est pas surjective.

Base de $\text{im}(T)$



6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées

Notes

Et ici, maintenant, le d et le e sont n'importe quelles valeurs réelles. Donc ça, c'est le noyau. Et puis, dès qu'on a posé ça, on sait comment trouver une base. Donc une base de $\ker(T)$, c'est que je pose un paramètre égal à 1 et l'autre 0, et après je change. Donc posons $d=1$, $e=0$, et je trouve l'élément : $2x - 3x^2 + x^3$. Et si je pose $d=0$ et $e=1$, j'ai : $6x - 7x^2 + x^4$. C'est une base de $\ker(T)$. Maintenant, je sais deux choses. Je sais que la dimension de $\ker(T)$ est égale à 2. Et donc, T n'est pas injective. Je sais aussi, par le théorème du rang, que la dimension de l'image est égale à la dimension de l'espace de départ qui était 5 moins la dimension du noyau 2, donc c'est égal à 3. Et donc, T n'est pas surjective. Et je sais encore une chose : trouver une base. T n'est pas injective, T n'est pas surjective donc T n'est sûrement pas bijective. Et maintenant je sais aussi comment trouver une base de l'image. C'est la dernière chose que je vais dire ici. Maintenant, j'utilise cette proposition.

Summary



18m 11s

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 & 17 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions du système $AX=0$ est

d, e libres

$$c = -3d - 7e$$

$$b = -(-3d - 7e) - d - e = 2d + 6e$$

$$a = 0$$

$$\ker T = \{ a \cdot 1 + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4 \mid d, e \text{ libre, } a=0, b=2d+6e, c=-3d-7e \}$$

$$= \{ (2d+6e)x + (-3d-7e)x^2 + d x^3 + e x^4 \mid d, e \in \mathbb{R} \}.$$

$$\text{base de } \ker(T) : \begin{matrix} d=1, e=0 \\ d=0, e=1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2x - 3x^2 + x^3 \\ 6x - 7x^2 + x^4 \end{matrix} \right\} \text{ base de } \ker(T).$$

$\dim(\ker T) = 2$, donc T n'est pas injective.

Par le théorème du rang, $\dim(\text{im } T) = 5 - 2 = 3$; T n'est pas surjective.

Base de $\text{im}(T)$ est $((2, 3, 1, 0, 2), (3, 3, 0, -1, 0), (5, 3, 0, -1, 0))$.



6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées

Donc ici, je sais qu'une base de l'espace des colonnes de cette matrice-là est donnée par les colonnes un, deux et trois de cette matrice, parce qu'ici dans la version échelonnée de la matrice, les pivots se trouvent dans les colonnes un, deux, trois. Donc, je reviens ici et je prends ces colonnes-là. Comme l'espace d'arrivée, c'est \mathbb{R}^5 , et on a choisi la base canonique, une base de l'image de T est donnée par ces trois premières colonnes. Donc je prends : $(2, 3, 1, 0, 2)$ $(3, 3, 0, -1, 0)$ et $(5, 3, 0, -1, 0)$. C'est vraiment très bien, parce que là on a échelonné une seule fois, et après, on peut calculer une base du noyau, et aussi une base de l'image. Je trouve que c'est vraiment magnifique. Juste je souligne une chose avant de continuer : Ici, j'écris des vecteurs tels quels, donc les colonnes telles quelles, parce que l'espace de l'arrivée, c'est \mathbb{R}^5 et j'ai travaillé avec la base canonique. Si cette matrice, elle est représentée là, je ne sais pas... Les images ça va dans un espace de matrice. Là je dois écrire les vecteurs qui sont vraiment dans l'espace d'arrivée, pas juste les lignes ou les colonnes comme ça.

Notes

Summary



20m 08s

Le triplet $(2, 3, 1)$ est une base de $\text{im}(T)$.
 On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 & 17 \\ 33 & 130 & 23 & 330 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'ensemble des solutions du système $AX=0$ est

d, e libres

$$c = -3d - 7e$$

$$b = -(-3d - 7e) - d - e = 2d + 6e$$

$$a = 0$$

$$\ker T = \{ a \cdot 1 + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4 \mid d, e \text{ libre, } a=0, b=2d+6e, c=-3d-7e \}$$

$$= \{ (2d+6e)x + (-3d-7e)x^2 + d x^3 + e x^4 \mid d, e \in \mathbb{R} \}.$$

base de $\ker(T)$: $d=1, e=0$, $\{ 2x - 3x^2 + x^3, \}$
 $d=0, e=1$ $\{ 6x - 7x^2 + x^4 \}$ (base de $\ker(T)$).

$\dim(\ker T) = 2$, donc T n'est pas injective.

Par le théorème du rang, $\dim(\text{im } T) = 5 - 2 = 3$; T n'est pas surjective.

Base de $\text{im}(T)$ est $((2, 3, 1, 0, 2), (3, 3, 0, -1, 0), (5, 3, 0, -1, 0))$.



6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées

Notes

Et enfin, il y avait une troisième question dans cet exemple. C'est de déterminer si un vecteur, qui est fixe, est dans l'image. C'est une vraie question, parce que T n'est pas surjective, donc il y a des vecteurs qui ne sont pas dans l'image. Et puis, je voulais déterminer si un vecteur donné est dans l'image.

Summary



21m 26s

Le triplet $((2, 3, 1, 0, 2), (3, 3, 0, -1, 0), (5, 3, 0, -1, 0))$ est une base de $\text{im}(T)$.

Question: $(1, 0, 1, 0, 1) \in \text{im}(T)$?

Deux méthodes: Existe-t-il $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que
 $(1, 0, 1, 0, 1) = \alpha(2, 3, 1, 0, 2) + \beta(3, 3, 0, -1, 0) + \gamma(5, 3, 0, -1, 0)$?

Deuxième méthode: rang $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$



6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



Donc là, je reprends la base. Donc je vais juste être sûre que c'est copié correctement. Oui, c'est correct. Donc, ça c'est une base de l'image. Et la dernière question qu'on s'est posée, c'est : Est-ce que le vecteur $(1, 0, 1, 0, 1)$ appartient à l'image de T ? C'était ça la question. Maintenant, il y aura deux méthodes. Une méthode, c'est de prendre cette base et de déterminer si je peux écrire ça comme une combinaison linéaire de ces vecteurs-là. Donc ça serait la question : Existe-t-il α, β, γ des nombres réels tels que ce vecteur-là $(1, 0, 1, 0, 1)$ soit égal à α fois le premier, plus β fois le deuxième, plus γ fois le troisième ? On répond à cette question, c'est un système d'équations à résoudre. Si la réponse est oui, alors ce vecteur appartient à l'image si la réponse est non, ce vecteur n'appartient pas à l'image. Maintenant, une autre méthode. Donc, deuxième méthode. C'est que je vais calculer deux rangs différents. Donc le rang de la matrice où je mets ces vecteurs-là dedans. $2, 3, 1, 0, 2 \quad 3, 3, 0, -1, 0 \quad 5, 3, 0, -1, 0$ est égal à 3.

Notes

Summary



21m 45s

Le triplet $((2, 3, 1, 0, 2), (3, 3, 0, -1, 0), (5, 3, 0, -1, 0))$ est une base de $\text{im}(T)$.

Question: $(1, 0, 1, 0, 1) \in \text{im}(T)$?

Deux méthodes: Existe-t-il $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que
 $(1, 0, 1, 0, 1) = \alpha(2, 3, 1, 0, 2) + \beta(3, 3, 0, -1, 0) + \gamma(5, 3, 0, -1, 0)$?

Deuxième méthode: $\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



Vous remarquez, je ne dis plus rang ligne, rang colonne, car je sais que c'est pareil, donc je peux parler du rang, tout simplement, d'une matrice. Et je sais que le rang est 3 parce que ces trois lignes sont linéairement indépendantes. Maintenant, je vais calculer le rang de la matrice où je rajoute une ligne. Donc je rajoute ce vecteur-là comme ligne de la matrice. Et puis, je vais calculer le rang. Alors, si je trouve que le rang est égal à 3, ça veut dire que la dimension de l'espace engendré par ces quatre lignes est toujours 3, et qu'en rajoutant cette quatrième ligne, j'ai rien rajouté. Il était déjà une combinaison linéaire de ces trois lignes-là. Si je trouve que le rang de cette matrice est égal à 4, ça veut dire que j'ai rajouté quelque chose ici qui n'appartenait pas à l'espace engendré par les trois premières lignes. Et donc, à ce moment-là, il n'est pas dans l'image. Donc je calcule le rang. Et ceci est égal au rang. Bon, je vais échelonner la matrice. Déjà, je mets la dernière ligne en haut, parce que c'est la plus belle ligne. Maintenant, je vais additionner -2 fois cette ligne à la première ligne-là. Donc j'ai $0, 3, -1, 0, 0$.

Notes

Summary



23m 29s

Le triplet $((2, 3, 1, 0, 2), (3, 3, 0, -1, 0), (5, 3, 0, -1, 0))$ est une base de $\text{im}(T)$.

Question: $(1, 0, 1, 0, 1) \in \text{im}(T)$?

Deux méthodes: Existe-t-il $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$(1, 0, 1, 0, 1) = \alpha(2, 3, 1, 0, 2) + \beta(3, 3, 0, -1, 0) + \gamma(5, 3, 0, -1, 0)?$$

Deuxième méthode: $\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 4 > \dim(\text{im } T)$$

Donc $(1, 0, 1, 0, 1) \notin \text{im}(T)$.

6.7 Bases de l'image et noyau, revisitées



J'additionne -3 fois cette ligne à la deuxième, donc j'ai $0, 3, -3, -1, -3$. J'additionne -5 fois cette ligne à celle-là, et j'ai $0, 3, -5, -1, -5$. Et puis, maintenant, ceci est égal au rang de la matrice. $0, 3, -1, 0, 0$. Maintenant, je vais simplement additionner -1 fois la deuxième ligne aux deux autres lignes-là, la troisième et la quatrième. Donc j'ai $0, 0, -2, -1, -3, 0, 0, -4, 1, -5$. Et puis, vous voyez bien que si je fais encore une... Bon, je le fais. J'allais dire que si je fais encore une étape, je vais obtenir un quatrième pivot et je peux le faire. Donc ici je multiplie cette ligne-là par -2, que j'additionne ici, donc j'ai $0, 0, 0, 3, 1$. Donc le rang de cette matrice est égal à 4, qui est plus grand que la dimension de l'image de T . Donc, comme j'avais dit avant, ça veut dire que ce vecteur-là n'appartient pas à l'image de T . Donc c'est vraiment des calculs très simples dès le moment où on sait que le rang d'une matrice est bien défini, c'est-à-dire le rang ligne est le même que le rang colonne. Maintenant, nous avons une méthode aussi pour trouver une base de l'espace colonne à partir d'une matrice échelonnée en échelonnant les lignes. Mais c'est vraiment... On a mis tout plein de trucs ensemble là dans cette vidéo.

Notes

Summary

