

6.9 Changement de base, matrices de passage



J'espère que j'ai réussi à motiver le choix d'une base différente par rapport à une application linéaire donnée. Maintenant, j'aimerais montrer comment, en général, on fait ce changement de base; c'est-à-dire si je me donne la matrice d'une application linéaire par rapport à deux bases, de V et W , est-ce qu'il y a une méthode calculatoire pour déterminer la matrice par rapport à deux bases différentes ? Évidemment, on peut calculer la matrice, mais est-ce qu'il y a quelque chose de plus général ? C'est ça que je vais vous montrer.

Notes

Summary



0m 03s

Définition. Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel, $T : V \rightarrow V$ une application linéaire. On appelle T un **endomorphisme**, une **transformation linéaire** ou un **opérateur linéaire**.

Considérons le cas particulier des transformations linéaires d'un espace vectoriel V de dimension finie. Pour une base \mathcal{B} de V , on écrit $[T]_{\mathcal{B}}$ pour $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.



6.9 Changement de base, matrices de passage

Donc d'abord, on va étudier un cas particulier. Puis, à la fin du chapitre, nous verrons le cas général. Donc le cas particulier ici, c'est que je vais d'abord étudier une application qui part de V et qui arrive dans V . Pas V dans W , mais V dans V . Maintenant, souvent on appelle ça autre que juste une application linéaire pour souligner qu'il part d'un espace et qu'il arrive dans le même. Il y a plusieurs terminologies, je mentionne les trois qu'on pourrait voir. Des fois, on appelle T un endomorphisme parce qu'il est... Endo-, ça veut dire à l'intérieur d'un même espace, il va d'un espace vers le même. Transformation linéaire, parce qu'il transforme un espace donné comme une symétrie de \mathbb{R}^3 ou bien une projection dans \mathbb{R}^3 , ce qui transforme l'espace. Ou bien un opérateur linéaire, donc il opère sur un seul espace au lieu d'être une application d'un espace vers un autre. Et la plupart du temps, je vais parler de transformation linéaire, mais dans certains livres, vous verrez le mot endomorphisme ou bien opérateur.

Notes

Summary



0m 37s

Définition. Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel, $T : V \rightarrow V$ une application linéaire. On appelle T un **endomorphisme**, une **transformation linéaire** ou un **opérateur linéaire**.

Considérons le cas particulier des transformations linéaires d'un espace vectoriel V de dimension finie. Pour une base \mathcal{B} de V , on écrit $[T]_{\mathcal{B}}$ pour $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.

Question Etant données deux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} de V , y a-t-il une relation entre $[T]_{\mathcal{B}}$ et $[T]_{\mathcal{C}}$?

6.9 Changement de base, matrices de passage



Maintenant, ça c'est une définition qui vaut même si le V est de dimension infinie, mais comme ici on est dans le chapitre où on associe une matrice à chaque application linéaire, je vais aussi considérer un cas encore plus particulier: c'est que je considère le cas des transformations linéaires d'un espace qui est de dimension finie. Maintenant, je me donne une telle transformation T qui part de V qui arrive dans V , et je fixe une base de V . Et puis, comme il y a... Ici, je fixe une seule base, parce que c'est dans le même espace, on se donne la facilité de noter T par rapport à \mathcal{B} pour dire $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$. Jusqu'à maintenant même quand j'avais deux fois la même base, j'avais noté les deux, mais si on voit ça, ça veut dire c'est juste, j'utilise à gauche et à droite dans l'espace de départ et d'arrivée la même base. Donc la question qu'on se pose, c'est la suivante : étant donné deux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} de notre espace vectoriel V , y a-t-il une relation entre les matrices T écrit par rapport à la base \mathcal{B} et T écrit par rapport à la base \mathcal{C} ? Donc ça, c'est la question. Et puis, on a les outils disponibles pour répondre à cette question. La réponse est oui, et je vous expliquerai la relation précise entre ces deux matrices.

Notes

Summary



Définition. Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n avec bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Soit $\text{id} : V \rightarrow V$ l'application identité, $\text{id}(v) = v$ pour tout $v \in V$. On définit la matrice de passage entre les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} comme étant la matrice $[\text{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.

Exemple. Soient $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 0))$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$

$$[\text{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} : \quad \text{id}((1, 1, 1)) = (1, 1, 1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$$

6.9 Changement de base, matrices de passage



Ça passe par ce qu'on appelle une matrice de passage ou bien, des fois on appelle ça une matrice de changement de base. Donc je me donne un espace vectoriel de dimension n avec deux bases, B et C , et puis, je regarde l'application, la transformation linéaire qui est juste l'identité sur V . Il envoie V à V pour trouver dans V l'application identité. Et puis, je définie la matrice de passage entre les bases B et C comme étant la matrice de cette application, mais par rapport à B et ensuite C . Donc je vais illustrer ça dans un exemple, et je vais calculer deux matrices de passage, parce que je peux calculer l'identité $B \rightarrow C$, et je peux aussi calculer l'identité $C \rightarrow B$. Donc d'abord, je vais calculer celui qui est écrit là. Que dois-je faire ? Alors j'applique l'identité au premier vecteur de la base B , comme c'est juste l'application identité, ça donne le même vecteur. Et ensuite je dois l'écrire en termes de la base à droite de la deuxième base, donc ça c'est juste : $1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$ ça c'est simple. Je vais mettre ces coordonnées-là que je mets dans la matrice de l'application.

Notes

Summary



3m 16s

Définition. Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n avec bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Soit $\text{id} : V \rightarrow V$ l'application identité, $\text{id}(v) = v$ pour tout $v \in V$. On définit la matrice de passage entre les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} comme étant la matrice $[\text{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.

Exemple. Soient $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 0))$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$

$$[\text{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} : \begin{array}{lcl} \text{id}((1, 1, 1)) & = & (1, 1, 1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ \text{id}((0, 2, 0)) & = & (0, 2, 0) = 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ \text{id}((1, 0, 0)) & = & (1, 0, 0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \end{array}$$

$$[\text{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



6.9 Changement de base, matrices de passage

Je construis colonne par colonne cette matrice. Donc ici, j'ai 1, 1, 1. Ensuite j'applique l'identité au deuxième vecteur de la base, qui est juste (0, 2, 0), parce que c'est l'application identité et qui est $0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$. J'écris ces coordonnées dans la deuxième colonne de la matrice. Et enfin, l'identité appliquée à (1, 0, 0), c'est (1, 0, 0). Et puis ceci est égal à $1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$. Donc j'écris ces coordonnées dans la matrice. Donc ça c'est le premier calcul. Donc ça c'est ce qu'on appelle la matrice de passage, entre les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Maintenant, je vais continuer, parce que je vais calculer encore une matrice de passage, mais avec ces deux bases.

Notes

Summary



4m 45s

Exemple. Soient $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 0))$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$

$$[\text{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

$$\text{id}(e_1) = (1, 0, 0) = 0 \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 0) + 1 \cdot (1, 0, 0)$$

$$\text{id}(e_2) = (0, 1, 0) =$$

$$[\text{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



6.9 Changement de base, matrices de passage



Donc je me suis donnée de nouveau \mathbb{R}^3 , et les mêmes bases. Et cette fois, je vais calculer la matrice de passage : $C \ B$ dans ce sens-là. Je refais un calcul, mais vous voyez tout de suite que ce calcul sera un peu plus pénible, pas aussi évident. Donc je fais l'identité, je l'applique au vecteur e_1 . Donc ça c'est juste le vecteur $(1, 0, 0)$. Et puis, je dois l'écrire en termes de cette base-là. Là, en l'occurrence, il y a ce vecteur-là, ça ce n'est pas trop difficile. Donc j'ai 0 fois le premier vecteur plus 0 fois le deuxième vecteur plus 1 fois le troisième. Donc je suis en train de construire cette matrice. Donc je le construis ici, plus bas. Et dans la première colonne, je mets ces coordonnées-là. Donc, j'ai : 0, 0, 1. Maintenant, j'applique l'identité au deuxième vecteur de la base \mathcal{C} . Donc à e_2 . Donc ça me donne $(0, 1, 0)$. Et puis $(0, 1, 0)$, je dois l'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs-là, et je vois bien que c'est la moitié du deuxième. Donc j'ai 0 fois le premier vecteur plus 1/2 fois ce vecteurs-là plus 0 fois le troisième.

Notes

Summary



5m 45s

Exemple. Soient $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 0))$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$

$$[id]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

$$id(e_1) = (1, 0, 0) = 0 \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 0) + 1 \cdot (1, 0, 0)$$

$$id(e_2) = (0, 1, 0) = 0 \cdot (1, 1, 1) + \frac{1}{2}(0, 2, 0) + 0 \cdot (1, 0, 0)$$

$$id(e_3) = (0, 0, 1) = (1, 1, 1) - \frac{1}{2}(0, 2, 0) - (1, 0, 0)$$

$$[id]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6.9 Changement de base, matrices de passage



Donc j'écris ces coordonnées-là dans la deuxième colonne, donc j'ai : 0, 1/2, 0. Et puis, enfin, je dois appliquer l'identité à e_3 . Ça me donne e_3 que je dois exprimer comme une combinaison linéaire de ces vecteurs-là. Comme j'ai déjà fait le calcul, je vais vous montrer ce que c'est. Je prends le premier vecteur. J'enlève la moitié du deuxième et j'enlève le troisième. Effectivement, ça donne ce vecteur-là : (0, 0, 1). Donc j'ai enlevé ça et ça, et c'est correct. Et donc, dans la troisième colonne, je dois écrire ces coordonnées-là. Donc j'ai : 1, -1/2, -1. Donc ça c'est la matrice de passage dans l'autre sens. Après je vais vous expliquer à quoi ça sert, et lequel des deux il faut choisir selon ce qu'on veut faire. En tout cas, ça c'est la procédure de construire ces matrices de passage. Maintenant, je vais juste déjà vous faire remarquer une chose, c'est que si je fais l'identité $C B$ et je multiplie par la matrice identité dans l'autre sens $B C$, vous pouvez faire le calcul, mais sans faire le calcul, je sais aussi que c'est la même chose que l'identité composée avec l'identité par rapport aux bases C , et ça c'est juste l'identité par rapport aux bases C , une seule base, et ça c'est la matrice identité.

Notes

Summary



7m 10s

Exemple. Soient $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 0))$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$

$$[id]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

$$id(e_1) = (1, 0, 0) = 0 \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 0) + 1 \cdot (1, 0, 0)$$

$$id(e_2) = (0, 1, 0) = 0 \cdot (1, 1, 1) + \frac{1}{2}(0, 2, 0) + 0 \cdot (1, 0, 0)$$

$$id(e_3) = (0, 0, 1) = (1, 1, 1) - \frac{1}{2}(0, 2, 0) - (1, 0, 0)$$

$$[id]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[id]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \cdot [id]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [id \circ id]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = [id]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.9 Changement de base, matrices de passage

Et puis ça, c'est vrai même pas qu'ici dans ce cadre-là, mais en général. On voit qu'une des matrices de passage est l'inverse de l'autre matrice de passage.

Notes

Summary



Propriétés. Posons $P = [\text{id}]_{C\mathcal{B}}$.

- (1) P est inversible avec inverse $[\text{id}]_{\mathcal{B}C}$.
- (2) $P[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$, pour tout $v \in V$.
- (3) $[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P$.
- (4) Toute matrice inversible $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est une matrice de passage.



6.9 Changement de base, matrices de passage

Maintenant voyons des propriétés. Donc je pose P est égal à la matrice de passage entre B et C . P est une matrice inversible et son inverse c'est l'autre matrice de passage dans l'autre sens. Ça on a presque vu dans le slide précédant. Aussi, si je multiplie P par la représentation de V par rapport à la base B , ça me donne la représentation de V par rapport à la base C . C'est pour cette raison qu'on appelle P la matrice de passage, c'est que ça fait le passage entre B et C . Ça c'est le plus important, mais vraiment, c'est le plus important. Ici, je vais juste rajouter, ça c'est pour tout v dans V . Et aussi, je réponds maintenant à la question que j'ai posée au début : quelle est la relation entre la matrice de T par rapport à une base B et la matrice de T par rapport à une base C ? Alors cette relation est donnée précisément par cette égalité-là, c'est qu'on peut utiliser la matrice de passage et son inverse pour trouver la représentation de T par rapport à une base étant donnée la représentation par rapport à une autre base.

Notes

Summary



9m 00s

Propriétés. Posons $P = [\text{id}]_{CB}$.

- (1) P est inversible avec inverse $[\text{id}]_{BC}$.
- (2) $P[v]_B = [v]_C$, pour tout $v \in V$.
- (3) $[T]_B = P^{-1}[T]_C P$.
- (4) Toute matrice inversible $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est une matrice de passage.

Preuve (1) $[\text{id}]_{CB} \cdot [\text{id}]_{BC} = [\text{id} \circ \text{id}]_{CC} = [\text{id}]_C = I$.

(2)



6.9 Changement de base, matrices de passage



Et puis, la quatrième propriété que je ne vais peut-être pas démontrer, parce qu'on ne l'utilise pas beaucoup, mais c'est quand même un fait, c'est que n'importe quelle matrice inversible est une matrice de passage entre deux bases de V . Maintenant je vais démontrer le un, deux et trois en tout cas. La preuve. Pour le un, on a essentiellement déjà vu. Donc ici, je prends B et je multiplie par l'autre matrice de passage et par la propriété que nous avons montrée faire la multiplication de matrice, c'est la même chose que si je fais la composition des applications donc c'est $C B$, $B C$, donc ça c'est $C C$. Et ça c'est quand on compose l'identité avec elle-même, ça c'est juste la matrice de l'application d'identité par rapport à la base C et ça c'est juste la matrice identité. Donc maintenant on peut aussi le faire dans l'autre sens et on obtient aussi la matrice identité ou bien on utilise le fait que nous avons montré, il y a longtemps, qu'il suffit de contrôler d'un côté et de l'autre. Maintenant deux, et ça c'est vraiment la propriété importante. Je prends un vecteur et je multiplie sa représentation par rapport à la base B par cette matrice P .

Notes

Summary



10m 08s

Propriétés. Posons $P = [\text{id}]_{CB}$.

- (1) P est inversible avec inverse $[\text{id}]_{BC}$.
- (2) $P[v]_B = [v]_C$, pour tout $v \in V$.
- (3) $[T]_B = P^{-1}[T]_C P$.
- (4) Toute matrice inversible $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est une matrice de passage.

Preuve (1) $[\text{id}]_{CB} \cdot [\text{id}]_{BC} = [\text{id} \circ \text{id}]_{CC} = [\text{id}]_C = I$.

(2) $P[v]_B = [\text{id}]_{CB} [v]_B = [\text{id}(v)]_C = [v]_C$

(3) $P^{-1}[T]_C P = [\text{id}]_{BC} [T]_C [\text{id}]_{CB} = [\text{id} \circ T \circ \text{id}]_B$

6.9 Changement de base, matrices de passage

Donc je redis ce que c'est P . Donc ça c'est l'identité par rapport aux bases B et C . Et puis maintenant par la propriété de multiplication ici, on sait que ça c'est la même chose que l'identité appliquée au vecteur v et maintenant, par rapport à la base C . Donc ça c'est exactement comment ça marche ici. Puis, l'identité appliquée à v , c'est juste v , écrit par rapport à la base C , donc ça c'est exactement l'égalité que nous avons là. C'est super. Et puis maintenant, trois. J'applique : $P^{-1}[T]_C P$ Je vais appliquer la règle qui dit que la multiplication devient la composition, donc ici ça c'est... On sait que l'inverse de P , c'est la matrice de passage dans ce sens-là. Là, j'ai substitué pour P ce que c'est et l'inverse c'est la matrice de passage dans l'autre sens. Et maintenant, ça c'est la même chose que la composition de l'identité composée avec T composé avec l'identité par rapport à quelles bases ? Donc B vers C , C vers C , C vers B , donc c'est par rapport à la base B . Mais si on compose T avec l'identité, ça ne change rien.

Notes

Summary



11m 26s

Propriétés. Posons $P = [\text{id}]_{CB}$.

- (1) P est inversible avec inverse $[\text{id}]_{BC}$.
- (2) $P[v]_B = [v]_C$, pour tout $v \in V$.
- (3) $[T]_B = P^{-1}[T]_C P$.
- (4) Toute matrice inversible $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est une matrice de passage.

Preuve (1) $[\text{id}]_{CB} \cdot [\text{id}]_{BC} = [\text{id} \circ \text{id}]_{CC} = [\text{id}]_C = I$.

(2) $P[v]_B = [\text{id}]_{CB} [v]_B = [\text{id}(v)]_C = [v]_C$

(3) $P^{-1}[T]_C P = [\text{id}]_{BC} [T]_C [\text{id}]_{CB} = [\text{id} \circ T \circ \text{id}]_B = [T]_B$.



6.9 Changement de base, matrices de passage

Donc ça c'est juste la matrice de T par rapport à la base B . Et ça c'est l'égalité qu'on voulait montrer ici. C'est super. Le quatre, je ne vais pas le démontrer. Maintenant, j'aimerais faire un exemple.

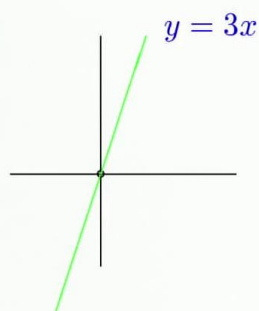
Notes

Summary



12m 50s

Exemple. Reprenons notre exemple de symétrie orthogonale avec $\mathcal{B} = ((1, 3), (-3, 1))$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$.



Rappel: On avait $[S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$[S]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$P = [id]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

6.9 Changement de base, matrices de passage



Donc je reprends l'exemple d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = 3x$. Et puis, j'avais deux bases : la base canonique par rapport à laquelle la matrice était moche; et puis, j'avais la base qui était justement l'axe de symétrie ici et aussi un orthogonal, et puis par rapport à laquelle la matrice était jolie. Et maintenant, je vais... Bon, je réécris les matrices, donc rappel: On avait que la matrice de S par rapport à la base \mathcal{B} , c'est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Et que la matrice de S par rapport à la base \mathcal{C} , c'était celle qui n'était pas jolie. C'était : $\begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ dans la première colonne ensuite, $3/5$ et $4/5$. Maintenant, essayons de voir si cette relation entre ces deux matrices est vérifiée en utilisant les matrices de passage. Donc il y a une matrice de passage qui est facile à écrire. Donc la matrice de passage P est égal à l'identité de \mathcal{B} vers \mathcal{C} . Donc là, je dois écrire la base \mathcal{B} en termes de la base \mathcal{C} , mais ça c'est ce qui est facile à écrire. Les coordonnées de ce vecteur-là en termes de \mathcal{C} , c'est juste 1, 3.

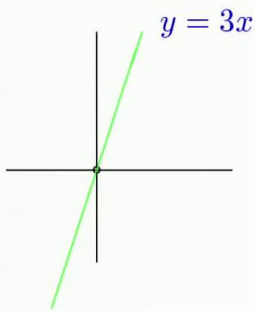
Notes

Summary



13m 04s

Exemple. Reprenons notre exemple de symétrie orthogonale avec $\mathcal{B} = ((1, 3), (-3, 1))$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$.



Rappel: On avait $[S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$[S]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$P = [id]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P^{-1} = [id]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[S]_{\mathcal{B}} = [id]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} [S]_{\mathcal{C}} [id]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$



6.9 Changement de base, matrices de passage

Et les coordonnées de ce deuxième vecteur en termes de \mathcal{C} , c'est juste -3, 1. Cette fois je ne vais pas écrire les coordonnées, mais je vais calculer l'inverse, donc P^{-1} , c'est la matrice de passage dans l'autre sens, et ceci est égal... Là j'utilise la formule que nous connaissons maintenant pour l'inverse. Donc c'est : [voir écran] Puis maintenant, je vais vérifier ce que nous avons dit. C'est que je prends S par rapport à la base \mathcal{B} , et ça devrait être... Pour maintenant, je montre comment je réfléchis ici. Donc j'ai S par rapport à la base \mathcal{C} . Et puis, ceci est égal à l'identité $\mathcal{B} \mathcal{C}$ et l'identité $\mathcal{C} \mathcal{B}$, et je vais vous montrer comment je sais. Je ne veux pas mémoriser une formule, car c'est très facile à oublier les choses qu'on pense qu'on a mémorisé, il faut vraiment raisonner. Donc je vous explique. Cette matrice-là, elle sait opérer sur un vecteur qui est écrit en termes de \mathcal{B} . C'est exactement ce que je cherche ici. Quand j'écris cette matrice-là, elle saura opérer sur un vecteur écrit en termes de \mathcal{B} . C'est pour ça que je dois avoir les deux bases pareilles ici à droite.

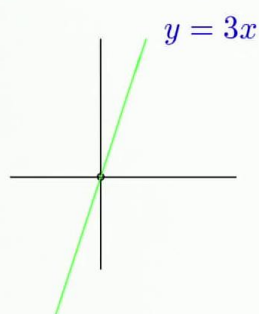
Notes

Summary



14m 33s

Exemple. Reprenons notre exemple de symétrie orthogonale avec $B = ((1, 3), (-3, 1))$ et $C = (e_1, e_2)$.



Rappel: On avait $[S]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$[S]_C = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$P = [id]_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P^{-1} = [id]_{BC} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} [S]_B &= [id]_{BC} [S]_C [id]_{CB} = P^{-1} \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} P \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.9 Changement de base, matrices de passage



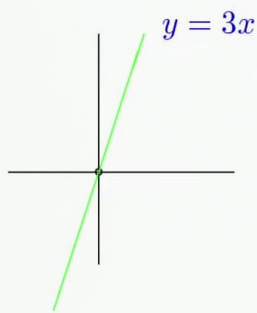
Ensuite, elle va me redonner un vecteur qui est écrit en termes de C . Ça c'est bien parce que cette matrice-là, elle sait opérer sur un vecteur qui est écrit en termes de C . Très bien. Le résultat qu'elle me donne, c'est un vecteur qui est écrit en termes de C . Cette matrice-là, elle va la transformer en vecteur qui est écrit en termes de B et ça c'est bien parce que le résultat final ici c'est aussi un vecteur écrit en termes de B . Donc, voyez, sans mémoriser une formule je connais cette égalité. Donc ceci est égal à P^{-1} fois la matrice de S par rapport à C , donc : $(-4/5 \ 3/5) (3/5 \ 4/5)$ fois P Et puis, je veux juste vérifier, donc ça c'est égal à P^{-1} , qui multiplie : $(-4/5 \ 3/5) (3/5 \ 4/5)$ fois P Donc c'est P^{-1} qui multiplie. Donc ici, j'ai $-4/5 + 9/5$ c'est $5/5$, donc ça c'est 1 . Ici j'ai $12/5 + 3/5$, c'est $15/5$, donc ça va être 3 . Ici, j'ai $3/5 + 12/5$, donc ça c'est aussi 3 , et ici j'ai $-9/5 + 4/5$, c'est $-5/5$, donc ça c'est -1 . Et ici, ça me donne $1/10$.

Notes

Summary



Exemple. Reprenons notre exemple de symétrie orthogonale avec $B = ((1, 3), (-3, 1))$ et $C = (e_1, e_2)$.



Rappel: On avait $[S]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$[S]_C = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$P = [id]_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P^{-1} = [id]_{BC} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} [S]_B &= [id]_{BC} [S]_C [id]_{CB} = P^{-1} \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} P \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [S]_B. \end{aligned}$$



6.9 Changement de base, matrices de passage

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ qui multiplie cette matrice-là, donc j'ai $1/10$. Ici j'ai $1 + 3 \cdot 3$, c'est 10. Là, j'ai $3 - 3$, c'est 0. Là, j'ai $-3 + 3$, c'est 0. Et ensuite, $-9 - 1$, c'est -10. Donc j'ai la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est effectivement la matrice de S par rapport à la base B . C'est très bien.

Notes

Summary



17m 41s