





### 6.11 Matrices semblables et autre terminologie

Nous avons beaucoup parlé de l'effet de changement de base sur une matrice qui représente une application linéaire d'un espace vectoriel dans le même espace vectoriel. Et puis dans la vidéo suivante. Pas celle-là mais dans la dernière vidéo de ce chapitre. Nous allons faire le cas général où l'on a une application qui part de  $V$  et qui arrive dans  $W$ . Mais avant cela, je vais rester juste ici encore une séance et puis poser quelques terminologies par rapport à ce cas là d'une application qui va de  $V$  dans  $V$ .

Notes

Summary



0m 03s

**Définition.** Soient  $A_1, A_2 \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . On dit que  $A_1$  est **semblable** à  $A_2$ , ou  $A_1$  et  $A_2$  sont semblables, s'il existe une matrice inversible  $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  t.q.  $P^{-1}A_1P = A_2$ .

Remarques : (1) Supposons que  $A_1$  est semblable à  $A_2$ , donc  $A_2 = P^{-1}A_1P$ ,  $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  inversible.

$$\text{On a } PA_2P^{-1} = A_1$$

## 6.11 Matrices semblables et autre terminologie



Voilà la définition je me donne deux matrices  $n \times n$  à coefficients réels on dit que  $A_1$  est semblable à  $A_2$  ou bien on dit que  $A_1$  et  $A_2$  sont semblables s'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}A_1P = A_2$ . Maintenant je vais juste faire une remarque ici ou quelques remarques et après je liste quelques propriétés d'abord une remarque la première remarque d'abord j'ai dit que  $A_1$  est semblable à  $A_2$ . Supposons qu'on ait ça. Supposons que  $A_1$  est semblable à  $A_2$  donc on a cette relation là que  $A_2 = P^{-1}A_1P$  pour un  $P$  inversible. Maintenant je vais travailler avec cette égalité. Je peux multiplier à gauche par  $P$  et à droite par  $P^{-1}$ . On a que  $PA_2P^{-1} = A_1$ . Et donc on pose  $Q = P^{-1}$  et on voit qu'on a exactement la relation et on a  $Q^{-1}A_2Q = A_1$  et donc  $A_2$  est semblable à  $A_1$ .

Notes

Summary



0m 37s

**Définition.** Soient  $A_1, A_2 \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . On dit que  $A_1$  est **semblable** à  $A_2$ , ou  $A_1$  et  $A_2$  sont semblables, s'il existe une matrice inversible  $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  t.q.  $P^{-1}A_1P = A_2$ .

Remarques : (1) Supposons que  $A_1$  est semblable à  $A_2$ , donc  $A_2 = P^{-1}A_1P$ ,  $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  inversible.

On a  $PA_2P^{-1} = A_1$  ; on pose  $Q = P^{-1}$  et on a  
 $Q^{-1}A_2Q = A_1$  et donc  $A_2$  est semblable à  $A_1$ .

(2) Si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une transformation linéaire alors  
 $[T]_{B_1}$  et  $[T]_{B_2}$  sont semblables, où  $B_1, B_2$  sont des bases de  $\mathbb{R}^n$ .  
 On a  $[T]_{B_2} = [id]_{B_2, B_1} [T]_{B_1} [id]_{B_1, B_2}$ .

#### 6.11 Matrices semblables et autre terminologie



C'est une chose de voir que cette relation est symétrique que si  $A_1$  est semblable à  $A_2$  alors  $A_2$  est semblable à  $A_1$  et c'est pour ça qu'on a le droit de dire après que  $A_1$  et  $A_2$  sont semblables. Ça c'est la première remarque. Maintenant une deuxième remarque. Si  $T$  est une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^n$  alors si je représente  $T$  par rapport à une base ou bien, par rapport à une autre base ces deux matrices là sont semblables où  $B_1$  et  $B_2$  sont des bases de  $\mathbb{R}^n$ . Je prends cette matrice la première, c'est la représentation matricielle de  $T$  par rapport à  $B_1$  la deuxième, c'est la représentation matricielle par rapport à  $B_2$  et puis, ces deux matrices sont semblables parce qu'on peut poser  $P$  ici la deuxième représentation matricielle est égale à la première où ici je pose l'identité qui va de  $B_2$  vers  $B_1$  et ici je pose l'identité qui va de  $B_1$  vers  $B_2$  et ceci est l'inverse de cela et donc on a la relation qui est exigée par la définition. Maintenant, encore des propriétés.

Notes

Summary



## Propriétés.

- (1) Si  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices semblables,  $A_i \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  alors  $A_1$  et  $A_2$  représentent une application linéaire  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  par rapport à deux bases différentes.

existe  $B_1, B_2$   
bases de  $\mathbb{R}^n$  t.g.

$$A_2 = P^{-1} A_1 P. \quad \text{Il}$$

$$P = [\text{id}]_{B_2, B_1}.$$

- (2) Si  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices semblables, alors  $\text{rang}(A_1) = \text{rang}(A_2)$ .
- (3) Si  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices semblables, alors  $A_1$  est inversible  $\Leftrightarrow A_2$  est inversible.

### 6.11 Matrices semblables et autre terminologie



Si j'ai deux matrices qui sont semblables et là je rajoute qu'elles sont des matrices  $n \times n$   $A_1$  et  $A_2$  des matrices  $n \times n$  qui sont semblables alors  $A_1$  et  $A_2$  représentent une seule application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  par rapport à deux bases différentes. Cela est essentiellement la réciproque de ce que l'on vient de voir et c'est parce que ici je sais que  $A_2 = P^{-1} A_1 P$  et on a déjà mentionné le fait que si on a une matrice inversible  $P$  alors  $P$  est effectivement la matrice de passage entre deux bases il existe deux bases de  $\mathbb{R}^n$  tel que ce  $P$  est égal à l'identité entre  $B_1$  et  $B_2$  donc la matrice de passage donc à ce moment là, on peut penser que  $A_1$  représente une application linéaire. C'est par la bijection entre les transformations linéaires et les matrices  $n \times n$  par rapport à une base et après je fais cette manipulation là et j'obtiens la représentation par rapport à une autre base si on a deux matrices qui sont semblables alors leur rang est le même c'est justement parce que leur rang c'est la dimension de l'image de cette application là.

Notes

Summary



4m 08s

## Propriétés.

- (1) Si  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices semblables,  $A_i \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  alors  $A_1$  et  $A_2$  représentent une application linéaire  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  par rapport à deux bases différentes.   
 existe  $B_1, B_2$  bases de  $\mathbb{R}^n$  t.g.  $A_2 = P^{-1} A_1 P$ . Il  $P = [id]_{B_2 B_1}$ .
- (2) Si  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices semblables, alors  $\text{rang}(A_1) = \text{rang}(A_2)$ .   
 $(1) \Rightarrow (2)$  car  $\text{rang}(A_1) = \dim \text{im}(T) = \text{rang}(A_2)$ .
- (3) Si  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices semblables, alors  $A_1$  est inversible  $\Leftrightarrow A_2$  est inversible.   
 $(2) \Rightarrow (3)$ . On utilise le théorème du rang.

### 6.11 Matrices semblables et autre terminologie



Donc cela suit de (1) (1) implique (2) car le rang de  $A_1$  le rang, je vous rappelle c'est le rang colonne, c'est le rang ligne c'est la même chose donc le rang de  $A_1$  est exactement la dimension de l'image de  $T$  et c'est la même chose si je prends une autre représentation matricielle de  $T$  c'est aussi le rang de  $A_2$ . Et puis enfin,  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices semblables si elle sont semblables alors  $A_1$  est inversible si et seulement si  $A_2$  est inversible cela aussi on peut le déduire parce que si  $A$  est inversible alors ça veut dire que le rang est maximal, c'est  $n$  et le rang de  $A_2$  est maximum:  $n$  et donc  $A_2$  est inversible et dans l'autre sens on sait aussi que (2) implique (3) on utilise essentiellement le critère de bijectivité quand on va d'un espace dimension  $n$  vers un espace dimension  $n$ . On utilise le théorème du rang c'est un corollaire du théorème du rang. Ce sont les propriétés qui vont avec cette définition.

Notes

Summary



$$[id]_{CB}$$

$$[id]_{CB} \cdot [v]_B = [v]_C$$

#### 6.11 Matrices semblables et autre terminologie

Maintenant je conclus avec une partie un peu pénible car malheureusement, la terminologie la matrice de passage de quelque chose vers quelque chose dépend dans quel pays on est en Belgique ou en France on ne dit pas exactement la même chose donc si j'écris la matrice de passage  $[id]_{CB}$  donc on sait ce que c'est, c'est la représentation matricielle de la transformation identité d'abord représentée, on prend la base  $B$  et on la représente en termes de la base  $C$  et on met ça dans la colonne on sait comment former cette matrice ce qui est important c'est que l'on sait aussi ce que fait cette matrice donc c'est ça qui est très important le fait c'est que si on prend cette matrice là et on multiplie par la représentation d'un vecteur par rapport à la base  $B$  cette multiplication là donne la représentation de  $v$  par rapport à la base  $C$  c'est vraiment la propriété essentielle qu'il faut comprendre ça c'est hyper important. Mais dans certains livres vous lirez que cette matrice là s'appelle la matrice de passage de  $B$  à  $C$  et dans d'autres livres vous verrez que ça s'appelle la matrice de passage  $C$  à  $B$ .

Notes

Summary



6m 59s



$$[id]_{CB}$$

$$[id]_{CB} \cdot [v]_B = [v]_C$$

$T: V \rightarrow V$  transformation linéaire.  
 $B_1, B_2$  deux bases de  $V$ .

$$[T]_{B_1} = [id] [T]_{B_2} [id]$$

#### 6.11 Matrices semblables et autre terminologie



Moi je ne veux pas rentrer dans cette histoire parce que je trouve que le langage ne devrait pas poser ce problème là, donc ce qui est important c'est de savoir quelle matrice on est en train de poser et quelle est l'utilité de cette matrice donc il y a ça comme utilité et son autre utilité c'est que si j'ai une application linéaire donc une transformation linéaire de  $V$  dans  $V$  et que je me donne deux bases de  $V$ . Je sais que j'ai ces deux représentations matricielles de  $T$  l'une par rapport à  $B_1$  et l'autre par rapport à  $B_2$  et puis je sais que c'est cette matrice et son inverse qui fait le changement de base donc ici, et je répète ça parce que je peux le répéter à longueur de journée pour que ça rentre ici, je vais mettre une des matrices de passage et ici, son inverse et ce qui est important c'est de savoir quelle matrice on pose là donc, je redis ici, cette matrice là, prend un vecteur écrit en termes de la base  $B_1$ . Je suis obligée ici de commencer avec un vecteur qui est écrit en termes de la base  $B_1$  et puis je veux la transformer en vecteur qui est écrit en termes de la base  $B_2$ .

Notes

Summary





$$[id]_{CB}$$

$$[id]_{CB} \cdot [v]_B = [v]_C$$

$T: V \rightarrow V$  transformation linéaire.  
 $B_1, B_2$  deux bases de  $V$ .

$$[T]_{B_1} = [id]_{B_1 B_2} [T]_{B_2} [id]_{B_2 B_1}$$

Autres notations utilisées pour  $[id]_{CB}$

## 6.11 Matrices semblables et autre terminologie

C'est cette matrice là, c'est exactement ça. Donc après le  $T$  va travailler avec ce vecteur et va me redonner un vecteur qui est écrit en termes de la base  $B_2$  et maintenant, comme je veux à la fin un vecteur qui est écrit en termes de la base  $B_1$  je vais la retransformer en vecteur écrit par rapport à la base  $B_1$ . Maintenant c'est tout pour la terminologie. Il y a aussi d'autres notations utilisées. Pour cette matrice de passage. Souvent on la note par un  $P$  car  $P$  c'est pour Passage mais on voit différentes notations des fois, on écrit  $P_{CB}$ , c'est une liste de notations possibles on voit aussi  $P_{B \leftarrow C}$  dans ce sens là on voit aussi une notation  $P_B^C$  ou bien  $[id]_B^C$  et il y en a probablement même d'autres donc je pense que si vous suivez un cours ailleurs d'algèbre linéaire si vous lisez un livre d'algèbre linéaire il faut bien lire quelle est la définition de cette matrice mais surtout il faut savoir, quand vous avez posé la matrice quel est l'effet de cette matrice sur la multiplication à gauche par un vecteur. Ou bien, quand on fait à gauche et à droite la multiplication de la représentation matricielle d'une application linéaire.

Notes

Summary

