



6.12 Changement de base, cas général



Nous arrivons à la fin de ce chapitre sur les matrices et les applications linéaires et nous allons maintenant traiter le cas général d'une application linéaire qui va de V dans W , les deux, des espaces de dimension fini, et puis, on sait que l'on peut poser une matrice pas forcément carrée, qui représente cette application linéaire par rapport aux bases choisies dans les deux espaces. Et maintenant j'aimerais vous montrer la relation entre cette matrice-là et une autre matrice que j'obtiendrais si je choisis des bases différentes. On a déjà étudié cette question dans un seul espace, les transformations d'un seul espace vectoriel, et maintenant je vais de V dans W .

Notes

Summary



0m 04s

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire entre deux \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W avec bases finies $\underbrace{B_V, B'_V}_{\text{bases de } V}$ et $\underbrace{B_W, B'_W}_{\text{bases de } W}$.

Question. Quelle est la relation entre $[T]_{B_W B_V}$ et $[T]_{B'_W B'_V}$?

$$[T]_{B'_W B'_V} = [T]_{B_W B_V}$$



6.12 Changement de base, cas général



Donc voici la situation exacte : j'ai une application linéaire de V dans W de \mathbb{R} -espaces vectoriels et je fixe dans V deux bases différentes et dans W deux bases différentes. Donc je souligne ici que cela, ce sont des bases de V , et celles-là des bases de W . Et puis je pose la question : quelle est la relation entre une des représentation matricielle, et l'autre. Et cette relation sera facile à écrire car maintenant on comprend bien comment manier notre matrice de passage. Et puis, je pose la relation, et après je vais vous convaincre que c'est juste. Donc, si j'écris T , et je veux la représenter par rapport aux deux bases avec le prime, alors, d'un côté, ici, imaginez que j'ai déjà écrit la représentation par rapport aux bases B_V et B_W . Je réfléchis. Cette matrice-là veut prendre un vecteur qui est écrit en termes de B_V' . mais mettre un vecteur en termes de B_V' ici n'a pas de sens. Donc d'abord je dois mettre ici une matrice de passage, qui va transformer un vecteur écrit en termes de B_V' , en un vecteur écrit en termes de B_V .

Notes

Summary



0m 47s

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire entre deux \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W avec bases finies $\underbrace{B_V, B'_V}_{\text{bases de } V}$ et $\underbrace{B_W, B'_W}_{\text{bases de } W}$.

Question. Quelle est la relation entre $[T]_{B_W B_V}$ et $[T]_{B'_W B'_V}$?

$$[T]_{B'_W B'_V} = [id]_{B'_W B_W} [T]_{B_W B_V} [id]_{B_V B'_V}$$

Car $v \in V$, $[v]_{B'_V}$ sa représentation par rapport à B'_V :

$$[T(v)]_{B'_W} = [T]_{B'_W B'_V} [v]_{B'_V}$$

$$[id]_{B'_W B_W} [T]_{B_W B_V} [id]_{B_V B'_V} [v]_{B'_V}$$

$$[T]_{B'_W B'_V} [v]_{B'_V}$$

6.12 Changement de base, cas général

Cette multiplication a un sens, je prends un vecteur en termes de B'_V , il va être transformé en termes de B_V , ensuite l'application va travailler avec, elle va me redonner un vecteur écrit en termes de B_W , mais à la fin j'aimerais un vecteur écrit en termes de B'_W , donc, de nouveau, je dois faire un passage, je vais mettre ici quelque chose qui transforme B_W en B'_W . Donc ça c'est la relation entre ces matrices. Maintenant j'aimerais juste vous convaincre que si je prends v dans V , alors je l'exprime en termes de B'_V une matrice, une représentation par un vecteur de la dimension de V , Maintenant j'applique T à ce vecteur-là, ceci est égal à T appliquée à v , exprimé en termes de B'_W . Donc ça c'est un côté, et puis ici, de l'autre côté, si je fais l'identité, l'application T et à nouveau l'identité, que je multiplie par ce vecteur colonne. Cette première partie va me redonner le vecteur écrit en termes de B_V . *Le reste je répète* Maintenant, ça, ça va me donner T appliquée à v écrit en termes de la base B_W .

Notes

Summary



Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire entre deux \mathbb{R} -espaces vectoriels V et W avec bases finies $\underbrace{B_V, B'_V}_{\text{bases de } V}$ et $\underbrace{B_W, B'_W}_{\text{bases de } W}$.

Question. Quelle est la relation entre $[T]_{B_W B_V}$ et $[T]_{B'_W B'_V}$?

$$[T]_{B'_W B'_V} = [id]_{B'_W B_W} [T]_{B_W B_V} [id]_{B_V B'_V}$$

Car $v \in V$, $[v]_{B'_V}$ sa représentation par rapport à B'_V :

$$\underbrace{[T(v)]_{B'_W}} = [T]_{B'_W B'_V} [v]_{B'_V} = [id]_{B'_W B_W} [T]_{B_W B_V} [id]_{B_V B'_V} [v]_{B'_V}$$

$$[id]_{B'_W B_W} [T]_{B_W B_V} [v]_{B_V}$$

$$[id]_{B'_W B_W} [T(v)]_{B_W}$$

$$\underbrace{[T(v)]_{B'_W}}$$

6.12 Changement de base, cas général

Et puis enfin quand je mets ces deux-là ensemble, le résultat est $T(v)$ écrit en termes de la base B'_W . On voit donc que multiplier cette matrice-là par un vecteur quelconque, a le même résultat que multiplier cette matrice-là par le même vecteur. Et quand on a deux matrices telles que AX est égal à BX , pour toute matrice X on sait que A est égale à B . Ça c'est un des résultats que nous avons montré. Donc tout ça, comme ceci, est égal à ça. Ça implique que les choses entre deux sont aussi égales. Maintenant j'applique ça à un grand exemple pour apprécier le résultat.

Notes

Summary



4m 30s

Exemple. Soit $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(0) \end{pmatrix}$$

Bases :

$$\mathcal{C}_1 = (1, x, x^2, x^3)$$

$$\mathcal{C}_2 = (1, x+1, x^2+1, x^3+1)$$

$$\mathcal{B}_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

6.12 Changement de base, cas général

Cette fois je me donne un exemple compliqué. J'ai un espace vectoriel de dimension quatre. Ça va vers un autre espace vectoriel de dimension quatre mais pas le même espace. donc les polynômes de degré au plus trois et les matrices 2x2. Et puis l'application, c'est défini comme ça, en termes de ces coordonnées, qui sont les évaluations du polynôme, en différentes valeurs dans \mathbb{R} . Et là je me donne quatre bases, d'abord deux bases de l'espace des polynômes, je vous laisse vérifier que ce sont vraiment des bases, et deux bases des matrices. Voilà la base dite canonique, et une autre base, que je vous laisse vérifier. Je vais d'abord écrire la représentation matricielle de T par rapport à \mathcal{C}_1 et \mathcal{B}_1 , car c'est facile à faire.

Notes

Summary



Exemple. Soit $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(0) \end{pmatrix}$$

Bases :

$$\mathcal{C}_1 = (1, x, x^2, x^3)$$

$$\mathcal{C}_2 = (1, x+1, x^2+1, x^3+1)$$

$$\mathcal{B}_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$



6.12 Changement de base, cas général

Donc, je fais T appliquée au vecteur de polynôme constant, ce qui me donne Pour le polynôme 1 évalué en n'importe quoi c'est 1, donc ça donne Ensuite, $T(x)$, c'est [voir écran] Ensuite T appliquée à x^2 , ça donne [voir écran] et T appliquée à x^3 , ça donne [voir écran] et du coup je peux représenter T par rapport à ces deux bases donc ça c'est la somme des matrices $E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}$. Ça c'est la somme des matrices $E_{12} - E_{21}$. Ici j'ai $E_{12} - E_{21}$. et ici j'ai $E_{12} - E_{21}$ Et donc T représentée par rapport à d'abord \mathcal{C}_1 envoyé vers \mathcal{B}_1 , c'est la matrice 4×4 définie par : La première colonne est une colonne de 1, la deuxième colonne c'est 0, 1, -1, 0, la troisième c'est 0, 1, 1, 0, et la quatrième c'est 0, 1, -1, 0. Maintenant j'aimerais aussi trouver la représentation matricielle de T par rapport aux bases \mathcal{C}_2 et \mathcal{B}_2 .

Notes

Summary



6m 02s

Il faut trouver $\text{id}|_{C_1 C_2}$, $\text{id}|_{B_1 B_2}$,

Exemple. Soit $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(0) \end{pmatrix}$$

$$\text{id}|_{C_1 C_2} =$$

Bases :

$$C_1 = (1, x, x^2, x^3)$$

$$C_2 = (1, x+1, x^2+1, x^3+1)$$

$$B_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

6.12 Changement de base, cas général



Et c'est par la relation déjà écrite précédemment, l'application T , par rapport à C_2 et B_2 , ça devrait être.. Je commence avec l'application T par rapport à C_1 et B_1 . Et c'est l'histoire racontée auparavant: ici on doit d'abord commencer avec C_2 qu'on tourne en C_1 . Ceci va donner quelque chose en termes de B_1 , donc je dois passer de B_1 vers B_2 , donc je dois écrire ces deux matrices de passage. Je garde les bases pour savoir ce que je dois écrire. Je répète : il faut calculer deux matrices de passage, on avait besoin de la matrice de passage de C_2 vers C_1 et aussi celle de B_1 vers B_2 . Maintenant une des deux est facile à trouver : il s'agit de l'identité de C_2 vers C_1 , car c'est la matrice qui prend chaque vecteur de la base C_2 et qui l'exprime en termes de la base C_1 . Et comme C_1 est une base "facile", c'est une matrice facile à construire.

Notes

Summary



Il faut trouver $[id]_{C_2, C_2}$, $[id]_{B_2, B_2}$

Exemple. Soit $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(0) \end{pmatrix}$$

$$[id]_{C_2, C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bases :

$$C_1 = (1, x, x^2, x^3)$$

$$C_2 = (1, x+1, x^2+1, x^3+1)$$

$$B_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$[id]_{B_2, B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.12 Changement de base, cas général



Donc ici le polynôme 1, c'est juste représenté par la colonne $(1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. Le polynôme $x+1$ est représenté par la colonne $(1 \ 1 \ 0 \ 0)^T$. Le polynôme $x^2 + 1$ est représenté par la colonne $(1 \ 0 \ 1 \ 0)^T$. Et le polynôme $x^3 + 1$ est représenté par la colonne $(1 \ 0 \ 0 \ 1)$. Donc ça c'est une des matrices de passage. Maintenant je dois trouver cette deuxième matrice de passage, c'est le passage de B_1 vers B_2 . Mais ce n'est pas une matrice facile à poser immédiatement, donc au lieu de le faire, je vais d'abord poser l'inverse de cette matrice, qui sera la matrice de passage de B_2 vers B_1 . Et ça sera facile à trouver pour la même raison, parce que j'exprime cette base-là en termes de la base canonique. Donc, je pose la matrice. Le premier vecteur de cette base, en termes de cette base canonique, c'est représenté par la colonne $(1 \ 0 \ 0 \ 1)^T$. Le deuxième vecteur est représenté par la colonne $(0 \ 1 \ 1 \ 0)^T$. Le troisième vecteur est représenté par la colonne $(1 \ 0 \ 0 \ -1)^T$.

Notes

Summary



$$[id]_{C_1 C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple. Soit $T: \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1)^2 & p(0) \end{pmatrix}$$

$$[id]_{B_2 B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bases :

$$C_1 = (1, x, x^2, x^3)$$

$$C_2 = (1, x+1, x^2+1, x^3+1)$$

$$B_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$B_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Il faut trouver $[id]_{C_1 C_2}$, $[id]_{B_2 B_1}$,

$$[id]_{C_1 C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[id]_{B_2 B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que

$$[id]_{B_2 B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = [id]_{B_1 B_2}$$

6.12 Changement de base, cas général



Et enfin le quatrième vecteur est représenté par la colonne $(0 \ 1 \ -1 \ 0)^T$. Je ne vais pas faire le calcul ici, il a déjà été fait, mais on vérifie que l'inverse de cette matrice est égal à la matrice [voir écran] Et ceci est exactement la matrice de passage de B_1 vers B_2 , et c'est ce qu'on cherchait.

Notes

Summary



10m 51s

$$[\text{id}]_{C_1 C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\text{id}]_{B_2 B_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B_1 C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = (1, x, x^2, x^3)$$

$$C_2 = (1, x+1, x^2+1, x^3+1)$$

$$B_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$[\tau]_{B_2 C_2} = [\text{id}]_{B_2 B_1} [\tau]_{B_1 C_1} [\text{id}]_{C_1 C_2}$$



6.12 Changement de base, cas général

Maintenant, pour terminer cet exemple, j'ai toutes ces matrices déjà trouvées, j'ai la matrice de passage de C_2 vers C_1 , la matrice de passage de B_1 vers B_2 , que nous venons de calculer, la matrice de T par rapport à ces deux bases canoniques, donc celle qui était facile à trouver. Maintenant on cherche la représentation matricielle de T par rapport aux bases C_2 et B_2 , et je refais le raisonnement, car je ne veux pas mémoriser. Donc j'ai la représentation de T par rapport à C_1 et B_1 , comme je veux mettre devant un vecteur en termes de C_2 , je dois d'abord passer de C_2 vers C_1 . Ce produit va redonner quelque chose en termes de B_1 , donc après je passe de B_1 vers B_2 , et comme maintenant j'ai toutes ces matrices, je ne vais pas les ré-écrire. On vérifie que ceci donne la matrice, je vais juste vous donner le résultat de cette multiplication [voir écran] Il faudra vérifier à la maison, que la multiplication a été faite correctement.

Notes

Summary



11m 43s

$$[\text{id}]_{C_1 C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\text{id}]_{B_2 B_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B_1 C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = (1, x, x^2, x^3)$$

$$C_2 = (1, x+1, x^2+1, x^3+1)$$

$$B_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$[T]_{B_2 C_2} = [\text{id}]_{B_2 B_1} [T]_{B_1 C_1} [\text{id}]_{C_1 C_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{à vérifier})$$

par exemple :

$$T(x+1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B_1 C_2}$$

6.12 Changement de base, cas général

Maintenant je vais vous montrer une chose: si on veut interpréter cette matrice, j'essaye de vous convaincre que c'est raisonnable, si je fais T du polynôme $x+1$, je suis censée évaluer le polynôme en zéro, ensuite en un, ensuite en moins un, ensuite re-évaluer en zéro. Donc ça donne cette matrice-là, et maintenant, $x+1$ c'est justement le deuxième vecteur de cette base-là, donc je devrais prendre la colonne ici, et l'interpréter en termes de la deuxième base ici. Donc, si je fais une fois le premier vecteur ici, plus une fois le deuxième, plus le quatrième, ça me donne la matrice suivante : [voir écran] Donc on a exactement la même chose. Ça dit au moins que la deuxième colonne dit la chose comme il faut. On pourrait vérifier les autres colonnes, mais ça c'est pour donner un exemple. Et enfin, j'aimerais terminer en disant quelque chose d'encore plus général. Si vous avez compris le raisonnement avec les matrices de passage, vous comprendrez de suite. C'est que, j'aurais aussi pu demander la représentation de T , par rapport, par exemple, à la base C_2 mais après B_1 . Donc je garde une des bonnes bases, et je change l'autre.

Notes

Summary



13m 20s

$$[id]_{C_1 C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[id]_{B_2 B_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B_1 C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = (1, x, x^2, x^3)$$

$$C_2 = (1, x+1, x^2+1, x^3+1)$$

$$B_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$[T]_{B_2 C_2} = [id]_{B_2 B_1} [T]_{B_1 C_1} [id]_{C_1 C_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{à vérifier})$$

par exemple :

$$T(x+1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.12 Changement de base, cas général



On va faire le raisonnement ensemble. Disons que j'ai la représentation de T selon C_1 et B_1 , la matrice qui était facile à calculer. Quel est le problème ici ? Le résultat est donné en termes de B_1 , il est bien ici aussi. Mais là j'aimerais commencer avec un vecteur en termes de C_2 , donc je dois mettre ici la matrice qui fait le passage de C_2 vers C_1 . Bon, ceci est un constat. Supposons maintenant que je change la deuxième base, mais pas la première. Alors là, la matrice que j'avais au début, c'était T par rapport à C_1 et B_1 . Que faut-il faire ? Ça ça prend un vecteur écrit en termes de C_1 , celle-là aussi. Mais le problème c'est qu'à la fin j'ai un vecteur écrit en termes de B_2 , donc ici je dois passer de B_1 vers B_2 . Donc il y a beaucoup de relations entre ces différentes représentations matricielles d'une seule application linéaire, mais si vous avez compris ce que sont les matrices de passage, vous saurez écrire toutes ces relations. Ça vaut vraiment la peine de passer du temps à bien comprendre la notation et ce que font ces matrices de passage.

Notes

Summary



15m 11s