



7.1 Le déterminant, définitions et exemples

Dans ce chapitre nous allons étudier ce qui s'appelle le déterminant d'une matrice. C'est une application qui associe à chaque matrice carrée donc une matrice $n \times n$ une valeur réelle. Et puis ça s'appelle le déterminant de la matrice. Donc du coup, on va laisser de côté nos espaces vectoriels et nos applications linéaires, et puis on revient au calcul matriciel. Je vais vous expliquer comment calculer le déterminant d'une matrice. Ensuite, je vais mentionner beaucoup de propriétés du déterminant, qui nous aident dans le calcul. Et ensuite, je vais vous montrer des applications intéressantes du déterminant. Par exemple, ça pourrait être utilisé pour donner un critère d'inversibilité d'une matrice. Cela peut aussi être utilisé pour trouver une formule explicite pour la résolution d'un système d'équations linéaire, où il y a n équations et n inconnues et qu'il existe une solution unique. Donc il y a des applications intéressantes et il y aura d'autres applications dans le prochain chapitre.

Notes

Summary



0m 03s

Définition. Récursive.

(1) $A = (a) \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R}), \det(A) = a.$

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}),$
 $\det(A) = ad - bc.$

(3) Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Posons \hat{A}_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant de A la i -ième ligne et la j -ième colonne.

$$\det(A) = a_{11}\det(\hat{A}_{11}) - a_{12}\det(\hat{A}_{12}) + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(\hat{A}_{1n}).$$



7.1 Le déterminant, définitions et exemples

Mais je vais commencer par vous donner la définition du déterminant; Alors le déterminant d'une matrice 1×1 c'est juste la valeur à l'intérieur de cette matrice la seule composante de la matrice donc là, le déterminant de A c'est juste a . Ensuite le déterminant d'une matrice 2×2 , c'est la valeur qu'on obtient si on multiplie les composantes de la diagonale et on soustrait le produit des deux autres composantes, donc $ad-bc$. Maintenant, la règle générale c'est que si on a une matrice $n \times n$ alors on va descendre à une somme de déterminants de matrices $(n-1) \times (n-1)$ en faisant comme suit : c'est qu'on regarde la première ligne de la matrice, donc vous voyez que ce sont des indices qui indiquent la première ligne et puis donc dans la première ligne, je vais supprimer la première ligne et la première colonne, ici. Je vais calculer le déterminant de cette matrice-là et puis je multiplie par le coefficient a_{11} Ensuite, je vais supprimer la première ligne et la deuxième colonne. Ça me donne une autre matrice $(n-1) \times (n-1)$, et ensuite je vais multiplier par la deuxième composante de la ligne mais avec un signe moins.

Notes

Summary



1m 11s

Définition. Récursive.

(1) $A = (a) \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R}), \det(A) = a.$

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}),$
 $\det(A) = ad - bc.$

(3) Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Posons \hat{A}_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant de A la i -ième ligne et la j -ième colonne.

$$\det(A) = a_{11}\det(\hat{A}_{11}) - a_{12}\det(\hat{A}_{12}) + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(\hat{A}_{1n}).$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) =$$

$$\hat{A}_{11} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$



7.1 Le déterminant, définitions et exemples

Et je continue ainsi avec des signes qui alternent. Donc ça va faire $+, -, +, -, \dots$ on commence toujours avec le $+$ jusqu'à ce qu'on arrive à la dernière composante de la première ligne, donc je fais tout de suite un exemple donc je prends une matrice 3×3 [voir écran] et puis j'aimerais calculer le déterminant. Donc le déterminant de A est égal, donc pour faire ceci je dois former ces matrices $\hat{A}_{11}, \hat{A}_{12}, \hat{A}_{13}$ donc ça serait... Je les écris ici : Donc \hat{A}_{11} , c'est la matrice 2×2 que j'obtiens si je supprime la première ligne et la première colonne de cette matrice, donc ça me laisse une matrice 2×2 qui est là: $\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$. La matrice \hat{A}_{12} , c'est la matrice 2×2 que j'obtiens si je supprime la première ligne et la deuxième colonne. Donc ça me laisse le $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$. Et puis ensuite le \hat{A}_{13} , c'est la matrice 2×2 que j'obtiens si je supprime la première ligne et la troisième colonne donc ça laisse cette matrice-là: $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Notes

Summary



2m 30s

Définition. Récursive.

(1) $A = (a) \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R}), \det(A) = a.$

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}),$
 $\det(A) = ad - bc.$

(3) Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Posons \hat{A}_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant de A la i -ième ligne et la j -ième colonne.

$$\det(A) = a_{11}\det(\hat{A}_{11}) - a_{12}\det(\hat{A}_{12}) + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(\hat{A}_{1n}).$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{11} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{13} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) =$$

$$1 \cdot \det \hat{A}_{11} - 2 \det \hat{A}_{12} + 3 \det \hat{A}_{13}$$

$$= 1(-6 \cdot 10 - 7 \cdot 9) - 2(4 \cdot 10 - 8 \cdot 7) + 3(4 \cdot 9 - 8 \cdot (-6))$$

$$= 1(-60 - 63) - 2(40 - 56) + 3(36 + 48)$$

$$= 161.$$

7.1 Le déterminant, définitions et exemples



Donc par la définition, le déterminant de A , c'est ce coefficient-là: 1 fois le déterminant de \hat{A}_{11} , -2 fois le déterminant de \hat{A}_{12} , +3 fois le déterminant de \hat{A}_{13} . Donc je continue, ceci est égal à 1 fois... Ici, j'ai le déterminant de cette matrice-là c'est $(-6 \cdot 10 - 7 \cdot 9)$, ensuite -2 fois et le déterminant de cette matrice, c'est $(4 \cdot 10 - 8 \cdot 7)$ +3 fois le déterminant de cette matrice qui est $(4 \cdot 9 - 8 \cdot (-6))$. Donc ceci est égal à $1 \cdot (-60 - 63) \dots -2 \cdot (40 - 56) \dots +3 \cdot (36 + 48)$. Et puis je vous laisse finir le calcul, c'est 161. Ça, c'est un exemple de calcul de déterminant. Faisons maintenant un exemple plus grand pour être sûr que vous avez compris la définition.

Notes

Summary



Exemple. $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \hat{A}_{12} + 0 \cdot \det \hat{A}_{13} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2$$

7.1 Le déterminant, définitions et exemples

Je commence cette fois avec une matrice 4×4 . Ceci, par définition, c'est le déterminant, donc j'ai 1 fois le déterminant de la matrice 3×3 que j'obtiens si je supprime la première ligne et la première colonne. Donc c'est la matrice [voir écran] et ensuite j'ai -0 fois le déterminant de \hat{A}_{12} que je ne vais pas écrire parce que c'est multiplié par 0, + 0 fois le déterminant de \hat{A}_{13} -2 fois le déterminant de la matrice que j'obtiens si je supprime la première ligne et la quatrième colonne, donc c'est la matrice [voir écran] Donc vous voyez, cette procédure peut être très longue. Maintenant, je suis descendue au déterminant de deux matrices 3×3 mais je dois encore descendre, ceci est égal... Je laisse tomber le 1 là, donc j'ai 1 fois le déterminant de la matrice 2×2 , ici dans le coin, -3 fois le déterminant de la matrice que j'obtiens si je supprime ici la première ligne et la deuxième colonne donc ça me laisse $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ensuite, -2 fois... Ici, je mets une grande parenthèse.

Notes

Summary



5m 39s

Exemple. $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \hat{A}_{12} + 0 \cdot \det \hat{A}_{13} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \left(-1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= (4-1) - 3(2-0) + 2(-1-0) - 6(0-0) = -5.$$

7.1 Le déterminant, définitions et exemples



Ici, j'ai 0 fois quelque chose donc après j'ai -1 fois le déterminant de la matrice que j'obtiens si je supprime la première ligne et la deuxième colonne. Ça me laisse cette matrice-là, +3 fois le déterminant de la matrice ici dans le coin. Je ferme la parenthèse. Enfin, ici j'ai (4-1)-3(2-0)... +2(-1-0) - 6(0-0), et puis ici enfin j'arrive à -5. Et puis maintenant, il y a quelque chose qui s'appelle la règle de Sarrus qui nous permet de calculer plus rapidement le déterminant d'une matrice 3 x 3. Après il n'y a pas d'astuces comme ça pour les matrices 4 x 4. Il y a d'autres astuces que je vous montrerai. Mais je montre déjà ici dans le premier paragraphe, l'astuce pour les matrices 3 x 3.

Notes

Summary

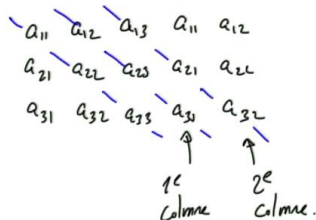


7m 27s

Règle de Sarrus pour calculer le déterminant d'une matrice 3×3 :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

L'astuce:



7.1 Le déterminant, définitions et exemples



Donc règle de Sarrus, ça marche pour 3×3 . Je vais vous donner la formule. Donc le déterminant d'une matrice, donc j'écris une matrice générale 3×3 , donc j'ai [voir écran] Donc, l'astuce est la suivante : j'élargis cette matrice. Donc je réécris la matrice et ensuite, à côté, je répète la première et la deuxième colonne. Donc [voir écran] Donc j'ai répété, ici c'est la première colonne et ici, c'est la deuxième. Et en fait, après que l'on ait écrit cela, on peut plus facilement calculer le déterminant et on fait la chose suivante, c'est qu'il y a plein de traits, de diagonales dans cette matrice. Je fais d'abord la diagonale ici, donc ceci est égal... le déterminant de la matrice, est égal... Donc je fais d'abord le trait là $a_{11}a_{22}a_{33}$ et ensuite je fais... Ça c'est un trait, ensuite je fais le trait diagonal là. $+a_{12}a_{23}a_{31}$ et ensuite je fais ce dernier trait, la diagonale là : $+a_{13}a_{21}a_{32}$ Je vais dessiner. D'abord, vous faites le produit de cela, ensuite, le produit de cette diagonale et ensuite, le produit de cette diagonale. On n'a pas fini.

Notes

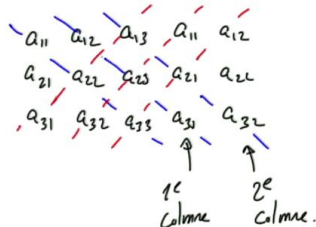
Summary



Règle de Sarrus pour calculer le déterminant d'une matrice 3x3:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

L'astuce:



Exemple : $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = -60 + 112$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 7 & 4 & -6 \\ 8 & 9 & 10 & 8 & 9 \end{array}$$



7.1 Le déterminant, définitions et exemples

Ensuite, on va soustraire le produit le long des autres diagonales dans l'autre sens. Donc ici, j'ai une diagonale, donc je soustrais $a_{31}a_{22}a_{13}$. Je soustrais l'autre, $a_{32}a_{23}a_{11}$. Ensuite, je soustrais la dernière, $a_{33}a_{21}a_{12}$. Donc là je vais dessiner car on ne voit pas très bien. J'ai un trait diagonal là. Ensuite, j'ai un trait diagonal là. Et ensuite, j'ai un trait diagonal là. Donc je revérifie : Donc on fait les traits diagonaux dans ce sens-là avec coefficient positif et puis dans ce sens-là avec coefficient négatif, et puis je vous laisse vérifier que ça donne la même chose si on calcule de l'autre façon. Je refais l'exemple que nous avons fait avant. Donc, exemple : je veux recalculer le déterminant de la matrice 3 x 3 que nous avons fait au début mais avec la règle. Donc, j'écris la matrice, et je rajoute ici à côté la première et la deuxième colonne et ensuite le déterminant, ça devrait être... Le trait dans ce sens-là, c'est -60. Le trait dans ce sens-là, c'est 2*56. donc c'est +112. Le dernier trait dans ce sens, c'est 12*9, c'est +108.

Notes

Summary

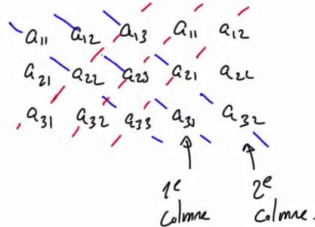


10m 58s

Règle de Sarrus pour calculer le déterminant d'une matrice 3x3:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

L'astuce:



Exemple : $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = -60 + 112 + 108 - (-48 \cdot 3 + 63 + 80) = 161.$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 7 & 4 & -6 \\ 8 & 9 & 10 & 8 & 9 \end{matrix}$$

7.1 Le déterminant, définitions et exemples



Ensuite dans ce sens-là, -... Dans ce sens-là, j'ai -48·3 Ici, j'ai +63, et ici, j'ai 80. Et puis je refais le calcul et je vous laisse vérifier que ça donne effectivement 161. Donc ça c'est effectivement plus rapide. Si la matrice n'a aucune composante nulle dans la première ligne, ça c'est plus rapide. Sinon, s'il y a une composante nulle dans la première ligne, c'est pas forcément plus rapide. Mais ce qui est important c'est de savoir qu'il n'y pas d'astuces comme ça pour les matrices 4 x 4. Il faudrait développer d'autres méthodes que je vais vous montrer

Notes

Summary



12m 53s